Les Classements les Plus Généraux Assurant l'Analycité des Solutions des Systèmes Orthonomes pour des Conditions Initiales Analytiques

François Lemaire

ORCCA (Ontario Research Center for Computer Algebra)

Résumé Riquier a étudié le problème de l'analycité des solutions des systèmes d'EDP orthonomes passifs dont les conditions initiales sont analytiques. Le théorème d'analycité de Riquier prouve que ces solutions sont analytiques si les conditions initiales sont analytiques et sont données pour un classement à la fois de Riquier et de l'ordre total. Nous introduisons dans ce papier une classe plus générale de classements, appelés classements d'analycité, pour lesquels le théorème de Riquier est encore vrai : le théorème de Riquier est ainsi sensiblement généralisé. Nous prouvons également que ces classements sont les classements les plus généraux permettant d'appliquer le théorème d'analycité de Riquier au sens suivant : pour tout classement n'étant pas un classement d'analycité, il existe un système muni des conditions initiales analytiques données pour ce classement, dont la solution n'est pas analytique. Ce résultat généralise un résultat donné dans [7].

Théorème d'analycité de Riquier. Système d'EDP. Théorème de Cauchy–Kovalevskaya. Théorie de Riquier–Janet. Solutions analytiques. Séries formelles Gevrey.

La solution d'un système d'EDP composé de fonctions analytiques pour des conditions initiales analytiques est-elle analytique ? Cette question a été largement étudiée et la réponse à cette question dépend largement de la forme du système et des conditions initiales. Dans ce papier, nous nous intéressons à ce problème en choisissant l'approche de Riquier [13]. Comme le fait Riquier, nous ne considérons que des solutions en série formelle.

La méthode de Riquier consiste à fixer un ordre particulier (appelé classement) sur l'ensemble des fonctions inconnues et de leur dérivées. Une fois le classement choisi, Riquier considère des systèmes particuliers[1] et des conditions initiales analytiques qui tous deux dépendent du classement.

Quel que soit le classement choisi, l'existence et l'unicité de la solution est assurée[2]. Toutefois l'analycité de la solution n'est pas garantie. Le théorème d'analycité de Riquier démontre l'analycité de la solution si le classement vérifie deux hypothèses techniques, à savoir d'être à la fois de Riquier et de l'ordre total [3][4].

On savait que l'hypothèse de classement de l'ordre total était importante grce à l'étude de l'exemple suivant (équation de la chaleur), due à Sophie Kovalevskaya (u_x désigne $\frac{\partial u}{\partial x}$).

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

$$u(x,0) = 1/(1-x)$$

$$\text{classement : } u < u_x < u_{xx} < \cdots < u_{x^p} < \cdots < u_t < u_{xt} < u_{xxt} < \cdots$$

On montre que ce système est donné pour un classement qui n'est pas de l'ordre total (car $u_{xx} < u_t$) et que sa solution n'est pas analytique.

On[5] conjecturait que le théorème de Riquier se généralisait aux classements de l'ordre total i.e. que l'hypothèse de classement de Riquier était inutile. L'article [6] prouve que cette conjecture est fausse. Toutefois, [6] fournit un simple contre-exemple et n'apporte aucune réponse sur la généralisation possible du théorème d'analycité de Riquier.

Le présent papier répond à cet attente. Le premier résultat est une *généralisation du théorème d'analycité de Riquier* (théorème 1 page 211) aux *classements dits d'analycité* (ces classements sont introduits dans la section 2).

---

[1] ce sont les systèmes orthonomes passifs.

[2] car on ne considère que des solutions en série formelle

[3] Riquier prouve l'analycité pour des classements légèrement plus généraux que les classements de Riquier de l'ordre total. Voir la remarque 1.

[4] dans un classement de l'ordre total, les variables les plus dérivées sont supérieures aux variables les moins dérivées.

[5] voir [1] et [15, théorème 7.2.1, p108]

Le théorème 1 est énoncé en toute généralité au sens suivant : *pour tout classement n'étant pas un classement d'analycité, il existe un système et des conditions initiales analytiques données pour ce classement, dont la solution n'est pas analytique.* Cela constitue le second résultat.

1 Présentation du Problème

Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ deux éléments différents de $\mathbb{N}^m$. On pose $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$. On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^m$ de la façon suivante : $\alpha >_{lex} \beta$ si le premier élément non nul de la séquence $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_m - \beta_m$ est positif.

L'ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ désigne l'ensemble des variables indépendantes. Le monode commutatif engendré par les m dérivations $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ est noté Θ. Ses éléments sont les *opérateurs de dérivations* $\theta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_m})^{\alpha_m}$ où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ est un élément de $\mathbb{N}^m$. La somme des exposants α_i, appelée l'*ordre* de l'opérateur θ, est notée $\operatorname{ord}\theta$. L'opérateur identité, noté Id, est l'unique opérateur d'ordre 0. Les autres opérateurs sont dits *propres*. On pose $\theta! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Soit $\theta' = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\beta_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_m})^{\beta_m}$. On appelle plus grand commun diviseur de θ et θ, noté $\gcd(\theta, \theta')$, l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_m})^{\min(\alpha_m,\beta_m)}$. Si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour $1 \leq i \leq m$, on pose $\theta'/\theta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\beta_1-\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_m})^{\beta_m-\alpha_m}$. On définit $\theta >_{lex} \theta'$ par $\alpha >_{lex} \beta$. Pour un m-uplet $a = (a_1, \ldots, a_m)$, on note de manière abrégée a^α ou a^θ le produit $a_1^{\alpha_1} \cdots a_m^{\alpha_m}$.

Soit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un ensemble de variables dépendantes. L'ensemble Θ des opérateurs de dérivation agit sur U, donnant $\Theta U = \{\theta u \mid \theta \in \Theta,\, u \in U\}$ que l'on appelle l'ensemble des *dérivées*.

On peut fixer un ordre (total) sur ΘU. Riquier a défini dans [13] des ordres particuliers (aujourd'hui appelés classements de Riquier). Kolchin présente dans [5] des ordres (plus généraux que ceux de Riquier) appelés *classements* (en anglais *rankings*).

Définition 1 (Classement). *On appelle classement de ΘU (où U est un ensemble de variables dépendantes) tout ordre total sur ΘU vérifiant :*

1. *$\theta v \geq v$ (pour tout θ de Θ et tout v de ΘU) ;*
2. *$v > w \Rightarrow \theta v > \theta w$ (pour tout θ de Θ et tous v et w de ΘU).*

Parmi le très grand nombre de classements, on peut citer, entre autres, le classement grlex (gr comme graded et lex comme lexicographique).

Exemple 1. Le classement $\operatorname{grlex}(u_1, \ldots, u_n\,; x_1, \ldots, x_m)$ est le classement de $\Theta\{u_1, \ldots, u_n\}$ (Θ est le monode de dérivations commutatif engendré $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$) défini par $\theta_1 u_i > \theta_2 u_j$ si :

- $\operatorname{ord}\theta_1 > \operatorname{ord}\theta_2$ ou
- $\operatorname{ord}\theta_1 = \operatorname{ord}\theta_2$ et $\theta_1 >_{lex} \theta_2$ ou
- $\theta_1 = \theta_2$ et $i < j$

Définition 2 (Série formelle). *On appelle série formelle en $x_1, \ldots, x_m$ centrée en $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$ la somme $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x^0)^\alpha$ où $c_\alpha \in \mathbb{C}$ et $x^0 \in \mathbb{C}^m$. L'ensemble de ces séries formelles est noté $\mathbb{C}[[x - x^0]]$.*

Les séries formelles peuvent être vues comme des développements de Taylor infinis, de la convergence desquels on ne se soucie pas. On munit facilement $\mathbb{C}[[x - x^0]]$ d'une structure d'anneau.

Définition 3 (Domaine de convergence d'une série formelle).
Soit S la série formelle en $x_1, \ldots, x_m$ donnée par $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x^0)^\alpha$.

On appelle domaine de convergence de S, que l'on note $\Delta(S)$, l'ensemble des m-uplets de $\mathbb{C}$ pour lesquels la série S est absolument convergente, c'est-à-dire :

$\Delta(S) = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} |c_\alpha z^\alpha| \text{ est convergente}\}$

Définition 4 (Série de Taylor). *Soit f une fonction des variables $x_1, \ldots, x_m$, de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}$, définie dans un voisinage d'un point $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$.*

Si f est indéfiniment dérivable au point x^0, on associe à f la série formelle, appelée série de Taylor de f en x^0, $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x^0)^\alpha$ où :

$$c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \frac{\partial^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m)} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(x^0)$$

Définition 5 (Fonction analytique en un point). *Soit f une fonction des variables $x_1, \dots, x_m$, de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}$, définie dans un voisinage W d'un point x^0 de $\mathbb{C}^m$ et indéfiniment dérivable en x^0. Soit S la série de Taylor de f en x^0.*

On dit que f est analytique en x^0 (ou aussi développable en série entière au point x^0) s'il existe un voisinage non vide $V \subset W$ de x^0 tel que :

- *le domaine de convergence de S contient V ;*
- *$f(x) = S(x)$ pour tout x de V.*

Dans ce texte, nous nous intéressons uniquement à des systèmes d'équations différentielles partielles données sous la forme de systèmes orthonomes. Ces systèmes ont été introduits par Riquier.

Définition 6 (Système orthonome). *Soit $\mathcal{R}$ un classement. Un système fini de p équations est dit orthonome pour $\mathcal{R}$ s'il est de la forme $v_i = f_i(X, E_i)$ (pour $1 \leq i \leq p$) où :*

C1 *E_i est un ensemble fini de dérivées strictement inférieures à la dérivée v_i (pour le classement $\mathcal{R}$) ;*

C2 *f_i est une fonction de X et E_i analytique dans un certain domaine ;*

C3 *tout élément de E_i n'est la dérivée d'aucun des v_j ;*

C4 *tout v_i n'est la dérivée d'aucun des v_j pour $j \neq i$.*

Pour chacune des équations $v_i = f_i(X, E_i)$, v_i est appelé dérivée dominante car c'est la plus grande dérivée qui y figure.

Exemple 2. Soit $U = \{u, v\}$ où u et v sont des variables dépendantes de x et y. Les dérivées de u et v sont notées en indices (u_x désigne $\frac{\partial u}{\partial x}$). Pour le classement $\mathcal{R} = \text{grlex}(u, v\,; x, y) = v < u < v_y < u_y < v_x < u_x < v_{yy} < u_{yy} < v_{xy} < u_{xy} < \cdots$, le système Σ_1 est orthonome :

$$\Sigma_1 \begin{cases} u_{xx} = f_1(x, y, u, u_x, v_{xx}) \\ u_y = f_2(x, y, u, v) \\ v_{yy} = f_3(x, y, u, v, u_x) \end{cases}$$

Nous cherchons à résoudre de tels systèmes d'un point de vue local, c'est–à–dire nous cherchons des solutions au voisinage d'un point x^0. De plus, nous ne nous intéressons qu'aux solutions en série formelle. Grce à la forme particulière du système, nous verrons que l'on peut déterminer les valeurs des dérivées (de tout ordre) des solutions en x^0, et ce de manière unique à condition d'avoir convenablement fixé des conditions initiales.

Définition 7 (Dérivation d'une série formelle). *Soit $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} c_\alpha (x - x^0)^\alpha$. La dérivée de S par rapport à x_i, notée $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ est définie par :*

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m} (\alpha_i + 1) c_{\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_m} (x - x^0)^\alpha$$

Pour considérer des solutions en série formelle d'un système orthonome Σ, il faut être capable de remplacer dans les équations de Σ les inconnues u_i par des séries formelles. Cela est possible si les séries formelles sont compatibles avec les domaines d'analycité des fonctions de Σ.

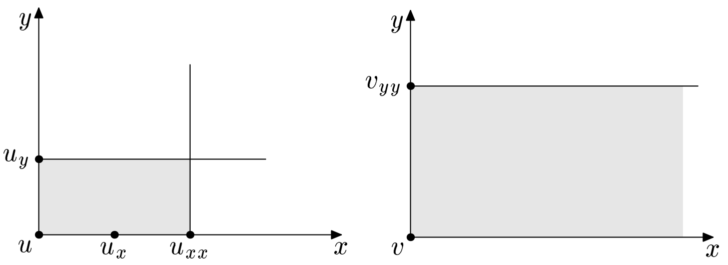
Exemple 3. Reprenons l'exemple 2 et intéressons–nous seulement à l'équation : $v_{yy} = f_3(x, y, u, v, u_x)$. Considérons deux séries formelles centrées à l'origine $\overline{u} = u^0 + u^0_x\, x + u^0_y\, y + u^0_{xx}\, x^2/2 + \cdots$ et $\overline{v} = v^0 + v^0_x\, x + v^0_y\, y + v^0_{xx}\, x^2/2 + \cdots$. Si la fonction f_3 est analytique au point $x = y = 0$, $u = u^0$, $v = v^0$ et $u_x = u^0_x$, alors on peut appliquer la composition de séries formelles et calculer $f_3(x, y, \overline{u}, \overline{v}, \frac{\partial \overline{u}}{\partial x})$.

Cette condition liant les domaines d'analycité des équations de Σ et les valeurs des coefficients d'éventuelles séries formelles solutions sera, dans notre cas, toujours remplie et ce grce à la manière dont les conditions initiales sont fixées.

Considérons un système orthonome Σ et appelons dérivée sous l'escalier[6] de Σ toute dérivée v vérifiant : v n'est la dérivée d'aucune dérivée dominante de Σ. On peut représenter graphiquement les dérivées sous l'escalier comme le montre l'exemple 4.

Exemple 4. Le système Σ_1 est celui de l'exemple 2.

[6] Riquier parle de dérivée paramétrique



Les dérivées sous l'escalier sont donc u, u_x et toutes les dérivées de la forme $\frac{\partial^i v}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial^{i+1} v}{\partial x^i \partial y}$ pour $i \geq 0$.

Pour toute équation $v_i = f(X, E_i)$ d'un système orthonome Σ, les éléments de E_i sont des dérivées sous l'escalier de Σ d'après les conditions **C1**, **C3** et **C4**. Cette remarque justifie la définition suivante.

Définition 8 (Conditions initiales admissibles (analytiques)). *Soit Σ un système orthonome pour un classement $\mathcal{R}$. On appelle conditions initiales admissibles de Σ au point x_0 tout jeu de valeurs des dérivées sous l'escalier de Σ tel que chaque fonction f_i du système soit analytique au point défini par ces valeurs.*

Les conditions initiales sont dites analytiques si les séries $u_i^0 = \sum_{\theta u_i \in F_i} \frac{(\theta u_i)(x^0)}{\theta!}(x - x^0)^\theta$ (où F_i est l'ensemble des dérivées de u_i sous l'escalier de Σ) ont un domaine de convergence non vide.

Pour des conditions initiales fixées, un système orthonome n'admet pas toujours une solution. Toutefois, si elle existe, la solution en série formelle est unique. Nous terminons cette section en expliquant cette propriété d'unicité et en rappelant quelques résultats concernant l'existence de solutions.

Unicité des Solutions

Si un système orthonome Σ admet une solution prolongeant des conditions initiales (admissibles), alors cette solution est unique. En effet, si v est une dérivée sous l'escalier, sa valeur est fixée par les conditions initiales. De plus, si v n'est pas une dérivée sous l'escalier, v est la dérivée d'une dérivée dominante v_i de Σ donnée par une équation $v_i = f_i(X, E_i)$. En dérivant cette équation, on obtient une expression de v en fonction de dérivées inférieures à v pour le classement $\mathcal{R}$ (ceci est une conséquence des axiomes des classements). Les valeurs de ces dérivées sont alors calculées suivant la même méthode et on montre que ce procédé de calcul s'arrête car un classement est un ordre artinien[7]. Si l'on a le choix entre plusieurs v_i, la dérivée v s'exprime de plusieurs manières. Toutefois on montre que l'on obtient la même valeur pour v au point d'expansion car on a supposé acquise l'existence d'une solution.

Exemple 5. Reprenons le système Σ_1 de l'exemple 2 et appelons w^0 la valeur attribuée à chaque dérivée w sous l'escalier au point $x = y = 0$.

Pour déterminer $v_{yy}(0,0)$, il suffit d'utiliser la fonction $f_3 : v_{yy}(0,0) = f_3(0,0,u^0,v^0,v_x^0)$. Pour déterminer $u_{xy}(0,0)$, il faut dériver (en utilisant une dérivation totale[8]) la fonction f_2 par rapport à x : $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y,u,v) = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u} u_x + \frac{\partial f_2}{\partial v} v_x$. Ainsi $u_{xy}(0,0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0,u^0,v^0) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0,u^0,v^0)u_x^0 + \frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0,u^0,v^0)v_x^0$.

Existence des Solutions

Un système orthonome n'admet pas toujours une solution pour des conditions initiales fixées. Par exemple, le système Σ_1 de l'exemple 2 n'admet pas toujours de solutions. Si l'on choisit $f_1 = y$ et $f_2 = x^2$, on a $u_{xxy} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ et $u_{xxy} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 2$. Dans ce cas, pour toutes conditions initiales, le système n'admet pas de solutions.

Le problème de l'existence de solutions est un problème difficile que nous ne traitons pas dans ce papier. Nous rappelons quelques méthodes traitant de l'existence.

La méthode de Riquier [13] porte sur l'étude des systèmes orthonomes passifs[9]. Si un système orthonome est passif, tout jeu de conditions initiales admissibles se prolonge en une unique solution[10].

[7] un ordre est dit artinien si toute suite strictement décroissante est finie
[8] i.e. u et v sont vues comme des fonctions de x et y
[9] en première approximation, un système orthonome est dit passif si ses contraintes d'intégrabilité sont résolues. Le lecteur pourra se reporter à [13, 4] [14, Chapitre VIII] ainsi qu'à [10, page 30].
[10] On peut à ce propos citer [16] où les auteurs démontrent l'existence de solutions en série formelle de systèmes orthonomes pour un classement quelconque ; Riquier ne démontre l'existence de solutions que pour les classements de Riquier (ces classements sont définis section 2).

Lorsque le système n'est pas passif, les conditions initiales doivent être choisies correctement[11] pour assurer l'existence de la solution. Pour s'affranchir de ces contraintes, Janet [4] présente une méthode (basée sur les variables multiplicatrices) permettant de se ramener à un système passif.

On peut également s'appuyer sur la théorie des systèmes différentiels extérieurs. Tout système analytique d'équations aux dérivées partielles peut être converti (sous certaines conditions d'indépendances) en un système différentiel extérieur analytique, et réciproquement [3, page 88]. On peut alors appliquer le test d'involution de Cartan [3] (basé sur le calcul des caractères de Cartan) ainsi que le théorème de Cartan–Kähler [9, Theorem 15.7].

Ainsi, les problèmes de l'existence et de l'analycité sont des problèmes pouvant être traités de manière indépendante et par des techniques différentes.

2 Théorème d'Analycité

Le classement de Riquier est un cas particulier du classement général défini par Kolchin (voir définition 1). Dans ses ouvrages, Riquier définit un tel classement en attribuant un système de poids[12] aux variables dépendantes et indépendantes. Initialement, Riquier imposait aux poids d'être entiers ; de nos jours, les poids sont supposés réels.

On peut également définir de manière équivalente les classements de Riquier à la manière de Caboara et Silvestri[2][13].

Définition 9 (Classement de Riquier). *Soit $\mathcal{R}$ un classement de ΘU. $\mathcal{R}$ est dit de Riquier si : $\theta_1 u_i < \theta_2 u_i \iff \theta_1 u_j < \theta_2 u_j$ pour tous $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$ et $1 \le i < j \le n$.*

Ainsi, la façon dont les dérivées d'une même variable dépendante sont ordonnées entre elles ne dépend pas de l'indéterminée elle–même.

Définition 10 (Classement faiblement de l'ordre total). *Un classement $\mathcal{R}$ de ΘU est dit faiblement de l'ordre total si $\operatorname{ord}\theta_1 > \operatorname{ord}\theta_2 \implies \theta_1 u_i > \theta_2 u_i$ pour tous $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$ et $1 \le i \le n$.*

Ces classements sont moins restrictifs que les classements de l'ordre total.

Définition 11 (Classement de l'ordre total). *Un classement $\mathcal{R}$ de ΘU est dit de l'ordre total si $\operatorname{ord}\theta_1 > \operatorname{ord}\theta_2 \implies \theta_1 u_i > \theta_2 u_j$ pour tous $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$ et $1 \le i, j \le n$.*

Définition 12 (Concaténation de classements). *Soit $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) un classement de ΘU_1 (resp. ΘU_2), où U_1 et U_2 sont deux ensembles disjoints de variables dépendantes. On pose $U = U_1 \cup U_2$. On construit le classement $\mathcal{R}$ de ΘU défini par $\theta_1 u <_{\mathcal{R}} \theta_2 v$ si :*

- *$u \in U_1$ et $v \in U_2$*
- *ou $(u, v) \in U_1$ et $\theta_1 u <_{\mathcal{R}_1} \theta_2 v$*
- *ou $(u, v) \in U_2$ et $\theta_1 u <_{\mathcal{R}_2} \theta_2 v$*

Le classement obtenu, noté $\mathcal{R}_1 \ll \mathcal{R}_2$, est appelé concaténation de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

La concaténation de classements n'est pas commutative ; elle est associative, ce qui justifie la notion de concaténation d'un nombre fini de classements $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_p$ que l'on note $\mathcal{R}_1 \ll \mathcal{R}_2 \ll \cdots \ll \mathcal{R}_p$.

Exemple 6. Le classement $\operatorname{grlex}(u\,; x, y) \ll \operatorname{grlex}(v\,; y, x)$ est de la forme :

$$u < u_y < u_x < u_{yy} < u_{xy} < \cdots < v < v_x < v_y < v_{xx} < v_{xy} < \cdots$$

Définition 13 (Classement d'analycité). *On appelle classement d'analycité tout classement obtenu par la concaténation d'un nombre fini de classements tous de Riquier et faiblement de l'ordre total.*

Exemple 7. Le classement de l'exemple 6 est un classement d'analycité.

Un classement d'analycité n'est a priori ni faiblement de l'ordre total, ni de Riquier, comme le montre l'exemple 6.

Théorème 1. *Soient Σ un système orthonome pour un classement d'analycité et un jeu de conditions initiales admissibles de Σ, analytiques en x^0. Si Σ admet une solution en série formelle, cette série est alors unique et analytique en x^0.*

[11] i.e. les conditions initiales doivent satisfaire les contraintes d'intégrabilité du système

[12] Riquier utilise le terme côte

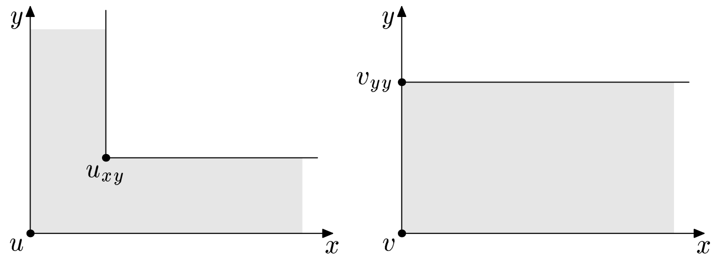
[13] On trouvera une ébauche de preuve de cette équivalence dans [2] et une preuve complète dans [12].

Démonstration. La preuve est donnée page 214.

Exemple 8. Le système Σ_2 suivant :

$$\Sigma_2 \begin{cases} u_{xy} = g_1(x, y, u, u_x, u_y) \\ v_{yy} = g_2(x, y, u, v, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{yyyy}) \end{cases}$$

est orthonome pour le classement $\mathrm{grlex}(u\,; x, y) \ll \mathrm{grlex}(v\,; y, x) = u < u_y < u_x < u_{yy} < u_{xy} < \cdots < v < v_x < v_y < v_{xx} < v_{xy} < \cdots$. Le théorème 1 s'applique (à l'origine) si les conditions initiales sont analytiques.



Dans la section 3, nous verrons que ce théorème est énoncé en toute généralité dans le sens où pour tout classement qui n'est pas d'analycité, il existe un système orthonome pour ce classement et des conditions initiales analytiques qui définissent une solution non analytique.

Un classement de Riquier peut être caractérisé par une matrice[14] codant un système de poids sur les variables dépendantes et indépendantes.

Notation 1. Pour toute dérivée θu_i de ΘU où $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\theta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_m})^{\alpha_m}$, on note $\Delta(\theta u_i)$ le vecteur colonne $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \underbrace{0, \ldots, 0, \overset{(m+i)}{1}, 0, \ldots, 0}_{n})^t$.

Théorème 2 (Classification des classements de Riquier). *Soit une matrice réelle M de q lignes et $m + n$ colonnes. On suppose les vecteurs colonnes supérieurs lexicographiquement au vecteur nul.*

On définit l'ordre $\leq_M$ sur les dérivées par $v \leq_M w \iff M\Delta(v) \leq_{lex} M\Delta(w)$ pour toutes dérivées v et w.

Si l'ordre $\leq_M$ est total, alors $\leq_M$ définit un classement de Riquier $\mathcal{R}$ sur ΘU. On dit alors que le classement $\mathcal{R}$ est caractérisé par la matrice M.

De plus, pour tout classement de Riquier $\mathcal{R}$, il existe un entier q et une matrice M à q lignes et $m+n$ colonnes qui caractérise le classement $\mathcal{R}$, les vecteurs colonnes étant supérieurs lexicographiquement au vecteur nul. Cette matrice M n'est pas unique.

Remarque 1. Le théorème 1 est une version légèrement plus générale que celle donne par Riquier car Riquier impose aux classements d'être définis par une matrice dont la première ligne est de la forme $(1, \ldots, 1, b_1, \ldots, b_m)$. Les classements ainsi obtenus sont faiblement de l'ordre total. Ils sont de plus irréductibles (voir définitions 14, 15 et 16) d'après la proposition 2. On peut également remarquer que le théorème de Riquier est parfois seulement cité pour les classements de l'ordre total [10, page 33] [7, page 69].

Le théorème d'analycité de Riquier est lui–même une version plus générale du théorème de Cauchy–Kovalevskaya. Pour faire le lien avec le formalisme de ce texte, voici une formulation du théorème de Cauchy–Kovalevskaya en termes en classements et de systèmes orthonomes[15].

Théorème 3 (Théorème de Cauchy–Kovalevskaya). *Soient n entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$. Soit Σ un système à n équations orthonome pour le classement de Riquier caractérisé par la matrice (les m premières colonnes correspondent aux variables indépandantes, les n dernières aux variables dépendantes ;*

[14] contrairement aux classements généraux qui nécessitent un mécanisme complexe mettant en œuvre plusieurs matrices, voir [12].

[15] Ce théorème n'est, à ma connaissance, jamais formulé en ces termes. Voir [11] pour une autre formulation.

les quantités non indiquées sont nulles)

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & \cdots & 1\ 1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & 1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\
\hline
 & & & 1 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & 1 &
\end{array}\right)$$

et de dérivées dominantes $\frac{\partial^{a_1} u_1}{\partial x_1^{a_1}}, \ldots, \frac{\partial^{a_n} u_n}{\partial x_1^{a_n}}$.

Pour tout jeu de conditions initiales admissibles analytiques, il existe une seule solution en série formelle prolongeant ces conditions initiales et cette solution est de plus analytique.

Il est intéressant de remarquer que le théorème de Cauchy–Kovalevskaya n'impose pas au classement d'être de l'ordre total mais seulement faiblement de l'ordre total.

Définition 14 (Restriction d'un classement). *Soient $\mathcal{R}$ un classement de ΘU et U' un sous–ensemble de U. On définit le classement $\mathcal{R}'$, appelé restriction de $\mathcal{R}$ à $\Theta U'$ et noté $\mathcal{R}|_{\Theta U'}$, par : $\theta_1 u <_{\mathcal{R}'} \theta_2 v$ si $\theta_1 u <_{\mathcal{R}} \theta_2 v$ pour tous $\theta_1 u$ et $\theta_2 v$ de $\Theta U'$.*

Définition 15 (Décomposition d'un classement). *Soit $\mathcal{R}$ un classement de ΘU. On dit que le p–uplet $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_p)$ est une décomposition de $\mathcal{R}$ d'ordre p si :*

- *$U_1, \ldots, U_p$ forme une partition de U ;*
- *$\mathcal{R}_i$ est un classement de ΘU_i et $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}|_{\Theta U_i}$;*
- *$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \ll \cdots \ll \mathcal{R}_p$.*

Tout classement $\mathcal{R}$ admet la décomposition triviale $(\mathcal{R})$ d'ordre 1. Toute décomposition d'un classement $\mathcal{R}$ de ΘU est d'ordre inférieur ou égal au cardinal de U ; la notion de décomposition d'ordre maximal a donc un sens. La proposition suivante montre qu'il n'existe qu'une seule décomposition d'ordre maximal.

Proposition 1. *Tout classement $\mathcal{R}$ admet une unique décomposition d'ordre maximal.*

Démonstration. Soient $D = (\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_p)$ et $\overline{D} = (\overline{\mathcal{R}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{R}}_p)$ deux décompositions de $\mathcal{R}$ d'ordre maximal. Nous montrons que si les deux décompositions D et $\overline{D}$ diffèrent, on peut construire une décomposition d'ordre $p+1$.

Soient $U_1, \ldots, U_p$ et $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_p$ les partitions respectives associées à D et $\overline{D}$. Comme $D \neq \overline{D}$, les deux partitions diffèrent nécessairement. Soit i le plus petit indice tel que $U_i \neq \overline{U}_i$.

Nous montrons qu'on a soit $U_i \subset \overline{U}_i$, soit $\overline{U}_i \subset U_i$. Par l'absurde, on suppose que l'on a $U_i \not\subset \overline{U}_i$ et $\overline{U}_i \not\subset U_i$. Ainsi : $\exists u \in U_i / u \notin \overline{U}_i$ et $\exists \overline{u} \in \overline{U}_i / \overline{u} \notin \overline{U}_i$. Comme $\overline{u} \in \overline{U}_i$, on a $\overline{u} \notin \overline{U}_j$ pour $1 \leq j < i$ car $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_p$ est une partition de U. De $U_j = \overline{U}_j$ pour $1 \leq j < i$ et $\overline{u} \notin \overline{U}_i$, on déduit $\overline{u} \notin \overline{U}_j$ pour $1 \leq j \leq i$. Cela implique $\overline{u} >_{\mathcal{R}} u$. On montre de même que $u >_{\mathcal{R}} \overline{u}$ ce qui est contradictoire.

On peut donc supposer que l'on a $U_i \subsetneq \overline{U}_i$. Il existe donc un ensemble $\widetilde{U}$ non vide vérifiant $U_i \cup \widetilde{U} = \overline{U}_i$ et $U \cap \widetilde{U} = \emptyset$. Pour tous $\theta_1 u$ de ΘU_i et $\theta_2 \widetilde{u}$ de $\Theta \widetilde{U}$, on a $\theta_1 u <_{\mathcal{R}} \theta_2 \widetilde{u}$. Ainsi $\overline{\mathcal{R}}_i = \mathcal{R}_i \ll \widetilde{\mathcal{R}}$ où $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}|_{\Theta \widetilde{U}}$.

On construit alors une nouvelle décomposition de $\mathcal{R}$: $(\overline{\mathcal{R}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{R}}_{i-1}, \mathcal{R}_i, \widetilde{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{R}}_{i+1}, \ldots, \overline{\mathcal{R}}_p)$. Cette décomposition est d'ordre $p+1$.

Définition 16 (Classement irréductible). *Un classement est dit irréductible si sa décomposition d'ordre maximal est d'ordre 1.*

Exemple 9. Le classement de l'exemple 6 admet $(\mathrm{grlex}(u\,; x, y), \mathrm{grlex}(v\,; y, x))$ pour décomposition d'ordre maximal.

Exemple 10. Tout classement de la forme $\mathrm{grlex}(u_1, \ldots, u_n\,; x_1, \ldots, x_m)$ est irréductible.

Théorème 4. *Soient Σ un système orthonome pour un classement $\mathcal{R}$ de Riquier irréductible faiblement de l'ordre total et un jeu de conditions initiales admissibles de Σ analytiques en x^0. Si Σ admet une solution en série formelle, cette série est alors unique et analytique en x^0.*

Ce théorème est quasiment identique au théorème d'analycité de Riquier, la seule différence étant que Riquier des poids entiers pour définir ses classements. Des remarques concernant la preuve de ce théorème, sont données en fin de section. Voici la preuve du théorème 1 qui s'appuie sur le théorème 4.

Démonstration (Preuve du théorème 1 :). On peut supposer que les dérivées dominantes de Σ font intervenir tous les éléments de U. En effet, si une variable dépendante u ne figure pas dans les dérivées dominantes, les conditions initiales fixent la valeur de la série formelle u qui est donc analytique. On peut donc substituer u par sa série formelle et supprimer u de U.

Soit $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_p)$ la décomposition d'ordre maximal de $\mathcal{R}$. Soit U_1 le sous–ensemble de U tel que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}|_{\Theta U_1}$. Le système Σ_1 extrait de Σ en ne conservant que les équations de dérivées dominantes appartenant à ΘU_1 est alors un système orthonome pour le classement $\mathcal{R}_1$.

La décomposition de $\mathcal{R}$ étant d'ordre maximal, le classement $\mathcal{R}_1$ est irréductible. On peut donc appliquer le théorème 4 qui assure l'analycité de la solution de Σ_1.

En remplaçant chaque u de U_1 par sa série formelle analytique dans Σ, on obtient un nouveau système orthonome pour le classement $\mathcal{R}_2 \ll \cdots \ll \mathcal{R}_p$.

On conclut la preuve par récurrence sur l'ordre de la décomposition d'ordre maximal du classement qui chute de 1 à chaque fois que l'on applique le raisonnement précédent.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{R}$ un classement irréductible, qui soit de Riquier faiblement et de l'ordre total. Il existe une matrice M, caractérisant $\mathcal{R}$, dont la première ligne est de la forme* $(1, \ldots, 1, b_1, \ldots, b_n)$.

Inversement, toute matrice dont la première ligne est de la forme $(1, \ldots, 1, b_1, \ldots, b_n)$ *caractérise un classement irréductible, de Riquier et faiblement et de l'ordre total.*

C'est précisément ce type de classement que Riquier considère (excepté que Riquier utilise des b_i entiers) dans [13] pour traiter le problème de l'analycité.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit M une matrice caractérisant $\mathcal{R}$. Supposons que la première ligne de M soit de la forme $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ fois}}, \underbrace{a, \ldots, a}_{n \text{ fois}})$. La matrice M, privée de cette ligne, caractérise encore le classement $\mathcal{R}$. En réitérant ce raisonnement, on peut supposer que la première ligne de M n'est pas de la forme précédente.

Soit $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ la première ligne de M. Si tous les a_i sont nuls, les b_i ne sont pas tous égaux d'après ce qui précède. Quitte à échanger les inconnues $u_1, \ldots, u_n$, on peut supposer $b_1 = \cdots = b_k < b_{k+1} \leq b_{k+2} \leq \cdots \leq b_n$. On a alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}|_{\Theta\{u_1,\ldots,u_k\}} \ll \mathcal{R}|_{\Theta\{u_{k+1},\ldots,u_n\}}$. Ce cas est impossible car $\mathcal{R}$ est supposé irréductible. Ainsi les a_i ne sont pas tous nuls.

Quitte à échanger les inconnues $x_1, \ldots, x_m$, on peut supposer que a_1 est le maximum des a_i. D'après le théorème 2, les vecteurs colonnes sont supérieurs lexicographiquement au vecteur nul ce qui implique que les a_i sont positifs. Montrons que les a_i sont égaux entre eux. Pour ce faire, on montre que s'il existe i tel que $a_i < a_1$, on aboutit à une contradiction. Il existe un entier n tel que $a_i(1 + \frac{1}{n}) < a_1$. De cette relation, on tire $(n+1)\, a_i < n\, a_1$ qui implique $\frac{\partial^{n+1}}{\partial x_i^{n+1}} u_1 < \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} u_1$. Ceci est impossible car $\mathcal{R}$ est faiblement de l'ordre total.

Ainsi, tous les a_i sont strictement positifs et tous égaux. En divisant la première ligne par a_1, on obtient la matrice voulue.

$\Longleftarrow$ La seule difficulté est de montrer le caractère irréductible du classement. Il suffit de prouver que pour toute dérivée θu_i et pour tout $1 \leq j \leq n$ $(i \neq j)$, il existe une dérivée $\theta' u_j$ telle que $\theta u_i < \theta' u_j$. Toute dérivée $\theta' u_j$ telle que $\operatorname{ord} \theta' + b_j > \operatorname{ord} \theta + b_i$ convient.

Démonstration (Remarques sur la preuve du théorème 4 :). La preuve de ce théorème est quasiment identique à celle que fournit Riquier dans [13]. En effet, d'après la proposition 2, il existe une matrice M caractérisant $\mathcal{R}$, dont la première ligne est de la forme $(1, \ldots, 1, b_1, \ldots, b_n)$. Ainsi, nous sommes dans les hypothèses du théorème d'analycité de Riquier, qui imposent aux poids des variables de dérivation d'être égaux à 1. Toutefois, la preuve de Riquier nécessite un léger aménagement pour tenir compte du caractère réel éventuel des éléments de la matrice M : Riquier ne considère que des poids entiers.

La preuve de [7, théorème 16, page 70] peut également être aménagée pour traiter le cas des classements de Riquier irréductibles faiblement de l'ordre total : [7, théorème 16] ne traite que le cas des classements de Riquier de l'ordre total.

Aucune de ces preuves (aménagées) n'est donnée car celles–ci sont trop longues et trop fastidieuses.

3 Contre–exemples

Nous montrons dans cette section que pour tout classement $\mathcal{R}$ de ΘU qui n'est pas d'analycité, on peut exhiber un système orthonome pour ce classement et des conditions initiales analytiques qui définissent une solution non analytique.

Nous distinguons deux cas :

Cas 1 $\mathcal{R}$ n'est pas faiblement de l'ordre total ;

Cas 2 $\mathcal{R}$ est faiblement de l'ordre total et il existe un classement $\mathcal{R}_i$ de la décomposition d'ordre maximal $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_p)$ de $\mathcal{R}$ qui ne soit pas de Riquier.

On montre aisément que l'étude de ces deux cas traite l'ensemble des classements qui ne sont pas d'analycité.

Cas 1 : $\mathcal{R}$ n'est pas faiblement de l'ordre total L'étude de ce cas est déjà présentée dans [15, page 109]. Il s'agit de la généralisation de l'équation de la chaleur donnée par Sophie Kovalevskaya :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

où $u(x,t)$ désigne la température d'une barre à l'abscisse x et au temps t. Pour un classement tel que $u_t > u_{xx}$ et en prenant comme conditions initiales $u(x,0) = 1/(1-x)$, la solution obtenue n'est pas analytique.

Comme $\mathcal{R}$ n'est pas faiblement de l'ordre total, il existe une variable u de U tel que le classement $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}|_{\Theta u}$ ne soit pas non plus faiblement de l'ordre total. Ce classement $\overline{\mathcal{R}}$ est de Riquier car c'est un classement sur les dérivées d'une seule variable. D'après le théorème 2, il existe une matrice M qui caractérise $\overline{\mathcal{R}}$.

Quitte à la supprimer, on peut supposer que la première ligne de M n'est pas de la forme $(0, \ldots, 0, b)$. La première ligne est alors de la forme $(a_1, \ldots, a_m, b)$, où les a_i ne sont pas tous nuls. Comme $\overline{\mathcal{R}}$ n'est pas de l'ordre total, les a_i ne sont pas tous égaux.

Quitte à renommer les variables indépendantes, il existe deux entiers strictement positifs k et l tels que $l > k > 0$ et $\frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^k} > \frac{\partial^l u}{\partial {x_2}^l}$.

Considérons alors le système orthonome de dérivée dominante $\frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^k}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial {x_1}^k} = \dfrac{\partial^l u}{\partial {x_2}^l} \\ \theta u(0) = \theta! \text{ pour toute dérivée } \theta u \text{ sous l'escalier de } \frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^k}. \end{cases}$$

Les conditions initiales sont analytiques car elles définissent une série formelle dont les coefficients sont égaux à 1.

Pour tout entier i positif, on a $\frac{\partial^{ki} u}{\partial {x_1}^{ki}}(0) = \frac{\partial^{li} u}{\partial {x_2}^{li}}(0) = (li)!$. Ainsi, la série $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(li)!}{(ki)!} x_1^{ki}$ est une sous–série de la série solution. Or $\frac{(li)!}{(ki)!} \geq (li - ki)! \geq i!$ car $l > k$. La série S n'est donc pas analytique, et la série solution ne l'est pas non plus.

Cas 2 : $\mathcal{R}$ est faiblement de l'ordre total et il existe un classement $\mathcal{R}_i$ de la décomposition d'ordre maximal $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_p)$ de $\mathcal{R}$ qui ne soit pas de Riquier. L'étude de ce cas est une généralisation du système présenté dans [6]. La construction du contre–exemple dépend du classement $\mathcal{R}_i$. Cette difficulté n'apparaît pas dans [6] car un seul classement y est considéré. La partie calculatoire est quant à elle quasiment identique, mais est néanmoins rappelée.

Appelons U_i le sous–ensemble de U tel que $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}|_{\Theta U_i}$. Comme $\mathcal{R}_i$ n'est pas de Riquier, il existe $(u,v) \in U_i^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$ tels que $\theta_1 u > \theta_2 u$ et $\theta_1 v < \theta_2 v$. Quitte à remplacer θ_1 et θ_2 respectivement par $\theta_1 / \gcd(\theta_1, \theta_2)$ et $\theta_2 / \gcd(\theta_1, \theta_2)$, on peut supposer que $\gcd(\theta_1, \theta_2)$ est l'opérateur identité (noté Id).

Comme $\mathcal{R}_i$ est faiblement de l'ordre total, les deux relations précédentes impliquent $\mathrm{ord}(\theta_1) \geq \mathrm{ord}(\theta_2) \geq \mathrm{ord}(\theta_1)$. Ainsi $\mathrm{ord}(\theta_1) = \mathrm{ord}(\theta_2) = p$ où p est un entier strictement positif.

Comme $\mathcal{R}_i$ est irréductible, il existe $(\theta, \theta') \in \Theta^2$ tel que $v < \theta u$ et $u < \theta' v$. Soit q un entier strictement positif tel que $pq > \mathrm{ord}(\theta)$ et $pq > \mathrm{ord}(\theta')$. On a $\theta_1^q u > \theta u > v$ car $\mathrm{ord}(\theta_1^q) = pq > \mathrm{ord}(\theta)$. De même, on a $\theta_2^q v > \theta' v > u$.

En renommant respectivement θ_1^q et θ_2^q en θ_1 et θ_2, on montre aisément que :

- $\theta_1 u > \theta_2 u$ et $\theta_1 v < \theta_2 v$
- $\theta_1 u > v$ et $\theta_2 v > u$
- $\gcd(\theta_1, \theta_2) = \mathrm{Id}$.

Le système Σ_z[16] suivant est donc orthonome de dérivées dominantes $\theta_1^2 u$ et $\theta_2^2 v$:

$$\Sigma_z \begin{cases} \theta_1^2 u = \theta_1 \theta_2 u + \theta_2^2 u + v \\ \theta_2^2 v = \theta_1 \theta_2 v + \theta_1^2 v + u \end{cases}$$

[16] Σ_z comme Σ_{zigzag}, voir figure 2

Les conditions initiales sont posées de la manière suivante : toute dérivée sous l'escalier est fixée à 1 à l'origine. *Nous allons montrer que les solutions u et v de Σ_z pour ces conditions initiales ne sont pas analytiques.*

Le calcul d'un coefficient $\theta u(0)$ (où θu est une dérivée de $\theta_1^2 u$) met en œuvre un calcul proche de celui de la suite de Fibonacci :

$$\theta u(0) = \theta' u(0) + \theta'' u(0) + \theta v(0) \text{ où } \theta' = (\theta\theta_2)/\theta_1 \text{ et } \theta'' = (\theta\theta_2^2)/\theta_1^2$$

Ainsi le terme $\theta u(0)$ est la somme de deux dérivées de u en haut à gauche sur la diagonale (plus une dérivée de v), comme le montre la figure 1 .

En itérant la formule précédente, on obtient, pour p entier positif : $\theta_1^p u(0) = f_{p-2}\, \theta_2^{p-2} v(0)+$ un entier positif (cette formule est démontrée page 217) où f est la suite (décalée d'un cran vers la gauche) de Fibonacci : $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour $n \geq 0$.

Par symétrie, le calcul de $\theta_2^{p-2} v(0)$ occasionne le même phénomène dans la direction opposée comme le montre la figure 1.

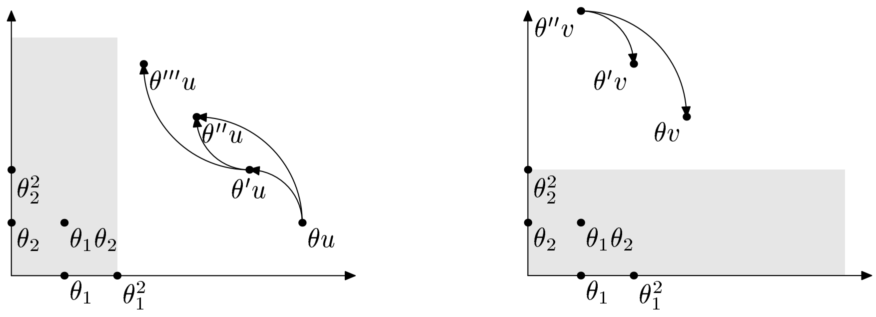


Fig.1. Visualisation du calcul

En poursuivant encore, on opère un calcul en *zigzag* (figure 2). Finalement, la valeur de $\theta_1^p u(0)$ est supérieure à un produit de termes de la suite (décalée) de Fibonacci. Cette valeur croît trop vite (quand p augmente) pour que u soit analytique (c'est ce que nous démontrons plus loin).

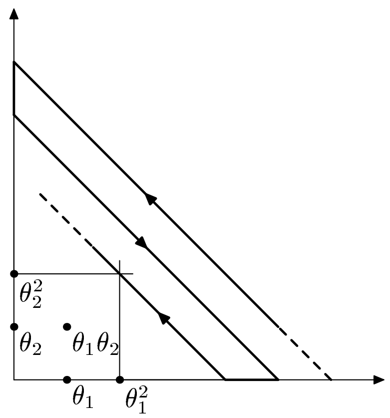


Fig.2. Calcul en zigzag

On introduit les deux suites à double indice $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définies par :

$$a_{i,j} = (\theta_1^i \theta_2^j) u(0)$$
$$b_{i,j} = (\theta_1^i \theta_2^j) v(0)$$

Supposons $0 \leq i \leq 1$ et j quelconque. Comme $\gcd(\theta_1, \theta_2) = \mathrm{Id}$, la dérivée $(\theta_1^i \theta_2^j)u$ n'est pas une dérivée de $\theta_1^2 u$. Sa valeur est donc fixée à 1 par les conditions initiales. On a donc $a_{i,j} = 1$ pour $0 \leq i \leq 1$ et j quelconque.

Supposons maintenant $i \geq 2$ et j quelconque. $\theta_1^i \theta_2^j u = \theta_1^2(\theta_1^{i-2}\theta_2^j u) = \theta_1\theta_2(\theta_1^{i-2}\theta_2^j u) + \theta_2^2(\theta_1^{i-2}\theta_2^j u) + (\theta_u^{i-2}\theta_v^j)v = \theta_1^{i-1}\theta_2^{j+1}u + \theta_1^{i-2}\theta_2^{j+2}u + \theta_u^{i-2}\theta_v^j v$. Ainsi, $a_{i,j} = a_{i-1,j+1} + a_{i-2,j+2} + b_{i-2,j}$. En raisonnant de manière symétrique pour la suite $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{i-1,j+1} + a_{i-2,j+2} + b_{i-2,j} \text{ si } i \geq 2 \\ a_{i,j} &= 1 \text{ si } i \leq 1 \\ b_{i,j} &= b_{i+1,j-1} + b_{i+2,j-2} + a_{i,j-2} \text{ si } j \geq 2 \\ b_{i,j} &= 1 \text{ si } j \leq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Nous allons montrer que la solution u n'est pas analytique. La preuve est décomposée en deux étapes :

Étape 1 On prouve la formule **(F)** pour $p \geq 0$, $q \geq 0$:

$$a_{p,q} = f_p + \sum_{i=0}^{p-2} b_{p-2-i,i+q} f_i \qquad \textbf{(F)}$$

où f est la suite définie par : $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pour $n \geq 0$;

Étape 2 On se sert de **(F)** pour montrer que la suite $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ croît trop vite pour que u soit analytique.

Démonstration. **Étape 1 :** on prouve **F** par récurrence sur p et q.

Base de la récurrence :

La formule **F** est vraie pour tout entier naturel q et p valant 0 ou 1.

Cas $p = 0$, q quelconque :

F fournit $a_{0,q} = f_0 = 1$. Cette valeur concide avec celle fournie par les conditions initiales.

Cas $p = 1$, q quelconque :

F fournit $a_{1,q} = f_1 = 1$. Cette valeur concide également avec celle fournie par les conditions initiales. La base de la récurrence est ainsi prouvée.

Hypothèse de récurrence :

La formule **F** est vraie pour p et tout entier naturel q, et vraie pour $p+1$ et tout entier naturel q. On montre que **F** est vraie pour $p+2$ et tout entier naturel q.

$$\begin{aligned} a_{p+2,q} &= a_{p+1,q+1} + a_{p,q+2} + b_{p,q} \text{ d'après (1)} \\ &= f_{p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} b_{p-1-i,i+q+1} f_i + f_p + \sum_{i=0}^{p-2} b_{p-2-i,i+q+2} f_i + b_{p,q} \\ &= (f_{p+1} + f_p) + b_{p-1,q+1} + \sum_{i=1}^{p-1} b_{p-1-i,i+q+1} f_i + \sum_{i=1}^{p-1} b_{p-i-1,i+q+1} f_{i-1} + b_{p,q} \\ &= f_{p+2} + b_{p-1,q+1} + \sum_{i=1}^{p-1} b_{p-1-i,i+q+1} f_{i+1} + b_{p,q} \\ &= f_{p+2} + b_{p-1,q+1} f_1 + \sum_{i=2}^{p} b_{p-i,i+q} f_i + b_{p,q} f_0 \\ &= f_{p+2} + \sum_{i=0}^{p} b_{p-i,i+q} f_i \end{aligned}$$

La formule **F** est donc vraie pour $p+2$ et tout entier naturel q, ce qui achève la preuve par récurrence.

Remarquons qu'on obtient (par symétrie entre les deux suites a et b) la relation :

$$\text{pour } p \geq 0 \text{ et } q \geq 0, \text{ alors } b_{p,q} = f_q + \sum_{i=0}^{q-2} a_{q-2-i,i} f_i$$

Étape 2 :

Par une preuve par récurrence, on montre immédiatement que tous les $a_{i,j}$ et les $b_{i,j}$ sont positifs. Ainsi pour $p \geq 2$ et $q \geq 2$, on déduit de **F** les inégalités $a_{p,q} \geq b_{0,p-2+q} f_{p-2}$ et (par symétrie) $b_{p,q} \geq a_{p-2+q,0} f_{q-2}$. Par conséquent, pour $p \geq 2$, on a :

$$a_{2p,0} \geq f_{2p-2} b_{0,2p-2} \geq f_{2p-2} f_{2p-4} a_{2p-4,0} \geq \cdots \geq f_{2p-2} f_{2p-4} \cdots f_2 K$$

où K vaut $a_{2,0}$ ou $b_{0,2}$. Dans les deux cas, K vaut 3.

En utilisant la théorie des suites récurrentes à coefficients constants, on montre facilement que : $f_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}$. Par un raisonnement simple, on en déduit qu'il existe deux réels C et r vérifiant :

- $C > 0$ et $r > 1$;
- $f_n \geq C r^n$ pour $n \geq 0$.

Ainsi, $a_{2p,0} \geq C^{p-1}(r^{2p-2} \cdots r^2) \times 3 \geq C^{p-1}(r^{p-1} \cdots r)^2 = C^{p-1}(r^{\frac{p(p-1)}{2}})^2 = C^{p-1} r^{p(p-1)}$.

Pour que u soit analytique, il faut nécessairement que l'ensemble

$$S = \left\{ \left(\frac{\theta_1^p u(0)}{(\theta_1^p)!}\right)^{\frac{1}{\mathrm{ord}(\theta_1^p)}}, p \in \mathbb{N} \right\}$$

soit borné[17].

On a $(\theta_1^p)! \geq (\mathrm{ord}(\theta_1)p)!$ car $(\mathrm{ord}(\theta_1)p)!/(\theta_1^p)!$ est un coefficient du binôme généralisé. En posant $\mathrm{ord}\,\theta_1 = k$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\left(\frac{\theta_1^{2p} u(0)}{(\theta_1^{2p})!}\right)^{\frac{1}{2pk}}\right) &\geq \tfrac{1}{2pk} \ln \tfrac{a_{2p,0}}{(2pk)!} \\
&\geq \tfrac{1}{2pk} \ln\left(\tfrac{C^{p-1} r^{p(p-1)}}{(2pk)!}\right) \\
&= \tfrac{1}{2pk}\big((p-1)\ln C + p(p-1)\ln r - \ln((2pk)!)\big) \\
&= \tfrac{p(p-1)}{2pk}\left(\tfrac{\ln C}{p} + \ln r - \tfrac{\ln((2pk)!)}{p(p-1)}\right) \\
&= \tfrac{(p-1)}{2k} \underbrace{\left(\frac{\ln C}{p} + \ln r - \frac{\ln((2pk)!)}{p(p-1)}\right)}_{A(p)}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux trois termes de la somme $A(p)$ quand p tend vers l'infini : le premier $\frac{\ln C}{p}$ tend vers 0, le deuxième $\ln r$ est constant et strictement positif car $r > 1$. Si le troisième terme tend vers 0 (démonstration ci–après), la quantité $\frac{p-1}{2k} A(p)$ tend vers l'infini. Ainsi S n'est donc pas bornée, ce qui prouve que u n'est pas analytique.

Pour terminer, on prouve que le troisième terme de la somme $A(p)$ tend vers 0 quand p tend vers zéro.

La formule de Stirling donne : $(2kp)! \sim_{p\to\infty} \left(\frac{2pk}{e}\right)^{2pk} \sqrt{4\pi pk}$ (formule d'équivalence quand p tend vers l'infini). On en déduit qu'il existe un entier p_0 tel que $p \geq p_0$ implique $(2pk)! \leq 2\left(\frac{2pk}{e}\right)^{2pk} \sqrt{4\pi pk}$.

Ainsi, si $p \geq p_0$:

$$\frac{\ln((2pk)!)}{p(p-1)} \leq \frac{\ln 2 + 2pk \ln \frac{2pk}{e} + \frac{1}{2}\ln(4\pi pk)}{p(p-1)} = \frac{\ln 2}{p(p-1)} + \frac{2(\ln 2 + \ln p + \ln k - 1)}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{\ln(4\pi pk)}{p(p-1)}$$

De cette inégalité, on déduit que $\lim_{p\to\infty} \frac{\ln((2pk)!)}{p(p-1)} = 0$ ce qui termine la preuve.

4 Conclusion

Les classements d'analycité définis dans ce texte sont les classements les plus généraux qui permettent d'assurer que tout système orthonome muni de conditions initiales analytiques, admet une solution analytique. Le théorème 1 est ainsi donné en toute généralité. Toutefois, ce théorème ne tient compte ni de la forme du système, ni de ses conditions initiales et ne fournit que des conditions suffisantes portant sur l'ensemble des dérivées dominantes. Les hypothèses de ce théorème peuvent certainement être assouplies dans le but de les rendre nécessaires.

Des résultats dans ce sens ont déjà été réalisés. Mizohata montre dans [8] que dans le cas d'une équation différentielle (aux dérivées partielles), les conditions imposées par le théorème de Cauchy–Kovalevskaya

[17] Il s'agit d'une conséquence directe du lemme d'Hadamard, qui exprime le disque de convergence d'une série formelle

sont nécessaires et suffisantes au sens suivant : ¡¡Soit l'équation $\theta u = a_o + \sum_{i=1}^{p} a_i \theta_i u$ où $\theta = \frac{\partial^q}{\partial {x_1}^q}$, les a_i sont des fonctions analytiques non nulles, et les opérateurs θ_i sont de la forme $\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}$ et vérifient $k_1 < q$. Si l'un des opérateurs θ_i est d'ordre strictement supérieur à q, alors il existe des conditions initiales analytiques (fixant les valeurs des dérivées sous l'escalier de θu) qui engendrent une solution non analytique¿¿. La complexité des techniques de microanalycité utilisées par Mizohata laisse toutefois présager que le travail risque d'être ardu.

Appendice

L'étude du caractère Gevrey de la solution traitée dans le cas 2 (section 3) est identique à l'étude menée dans [6]. Ainsi, par un calcul identique à celui mené dans [6], on montre aisément que la solution du contre–exemple présenté dans le cas 2 n'est Gevrey pour aucun ordre et qu'elle est q–Gevrey d'ordre 1.

References

1. François Boulier and Sylvain Neut. Cartan's characters and stairs of characteristic sets. Technical Report LIFL 2001–02, Université Lille I, LIFL, 59655 Villeneuve d'Ascq France, *http://www.lifl.fr/LIFL1/publications.html*, 2001.
2. M. Caboara and M. Silevstri. Compatible module orderings. In *ISSAC'96 Poster Session Abstracts, unpublished*, pages 17–22, 1996.
3. Élie Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Hermann, Paris, 1945.
4. Maurice Janet. *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, volume IV of *Cahiers Scientifiques.* Gauthier–Villars, Paris, 1929.
5. Ellis R. Kolchin. *Differential Algebra and Algebraic Groups.* Academic Press, New York, 1973.
6. François Lemaire. An orderly linear PDE system with analytic initial conditions with a non analytic solution. Technical Report LIFL 2001–10, Université Lille I, LIFL, 59655 Villeneuve d'Ascq France, *http://www.lifl.fr/LIFL1/publications.html*, 2001. (to appear in the JSC Special Issue on Computer Algebra and Computer Analysis).
7. François Lemaire. *Contribution à l'algorithmique en algèbre différentielle.* PhD thesis, Université Lille I, LIFL, 59655 Villeneuve d'Ascq France, 2002.
8. Sigeru Mizohata. On the Cauchy–Kowalewski theorem. In L. Nachbin, editor, *Adv. Math., Suppl. Stud.*, volume 7B, pages 617–652. Academic press, 1981.
9. Peter J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry.* Cambridge University Press, New York, 1995.
10. Ariane Péladan-Germa. *Tests effectifs de Nullité dans des extensions d'anneaux différentiels.* PhD thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, 1997.
11. I. G. Petrovsky. *Lectures on Partial Differential Equations.* Interscience Publishers, 1950.
12. G. J. Reid and C. J. Rust. Rankings of partial derivatives. In *proceedings of ISSAC 1997*, pages 9–16, Maui, Hawaii, USA, 1998. ACM Press.
13. Charles Riquier. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Gauthier–Villars, Paris, 1910.
14. Joseph Fels Ritt. *Differential Algebra.* Dover Publications Inc., New York, 1950.
15. C. J. Rust. *Rankings of derivatives for elimination algorithms and formal solvability of analytic partial differential equations.* PhD thesis, University of Chicago, 1998.
16. C. J. Rust, Gregory J. Reid, and Allan D. Wittkopf. Existence and Uniqueness Theorems for Formal Power Series Solutions of Analytic Differential Systems. In Sam Dooley, editor, *proceedings of ISSAC'99*, Vancouver, Canada, 1999. ACM Press.