Push/Relabel Methode (Goldberg-Tarjan)

ANNAHME: $D = (V, A)$ ist symmetrisch, d.h.

$$(u,v) \in A \quad \Longleftrightarrow \quad (v,u) \in A.$$

[Bem.: Kann man durch Hinzufügen von Kanten (x, y) mit $c(x, y) = 0$ immer erreichen.]

Pseudofluß: $f : A \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(u,v) &\leq c(u,v) && \text{für alle} (u,v) \in A \quad \text{und} \\ f(u,v) &= -f(v,u) && \text{für alle} (u,v) \in A. \end{aligned}$$

Überschuß (engl. *excess*) in einem Knoten $v \in V$:

$$e_f(v) := \sum_{u:(u,v)\in A} f(u,v)$$

Präfluß (engl. *preflow*): Pseudofluß mit

$$e_f(v) \geq 0 \qquad \text{für alle } v \in V \setminus \{s,t\}.$$

aktiver Knoten: Knoten $v \in V \setminus \{s,t\}$ mit $e_f(v) > 0$

Restkapazität: $c_f(a) = c(a) - f(a) \qquad$ für alle $a \in A$.

Residuengraph: $D_f = (V, A_f)$ wobei $A_f = \{a \in A \mid c_f(a) > 0\}$.

(zulässige) Markierung bzgl. f: Fkt. $d : V \to \mathbb{N}_0$ mit

$$d(s) = n,\ d(t) = 0 \text{ und}$$

$$d(u) \leq d(v) + 1 \qquad \text{für alle } (u,v) \in A_f.$$

Basisalgorithmus:

// Initialisierung

for all $(u, v) \in A$ **do**

$\quad f[u, v] = 0;$

$\quad$ **if** $u = s$ **then** $f[u, v] = c[u, v];$

$\quad$ **if** $v = s$ **then** $f[u, v] = -c[v, u];$

for all $v \in V$ **do**

$\quad e_f[v] = \sum_{w\,:\,(w,v)\in A} f[w, v];$

$\quad$ **if** $v = s$ **then** $d[v] = n$ **else** $d[v] = 0;$

// Schleife

while $\exists$ aktiver Knoten **do**

$\quad$ Führe eine (zulässige) Update-Operation durch;

Update-Prozeduren

$\textsc{Push}(v, w)$

Anwendbarkeit: v aktiv und $d[v] = d[w] + 1;$

Aktion: Sende $\delta = \min\{e_f(v), c_f(v, w)\}$ Flußeinheiten

$\qquad$ von v nach w;

$\textsc{Relabel}(v)$

Anwendbarkeit: v aktiv und

$$(\ (v, w) \notin A_f \ \text{ oder } \ d[w] \geq d[v]\ ) \quad \forall w \in \Gamma^+(v);$$

Aktion:

$$d[v] = \min\{d[w] + 1 \mid w \in \Gamma^+(v) \text{ mit } (v, w) \in A_f\};$$

$\underline{\textsc{Push}/\textsc{Relabel}(v)}$

Anwendbarkeit: v aktiv

Sei $\{v, w\}$ die derzeitige *current edge* von v;

if $\textsc{Push}(v)$ anwendbar **then**

    $\textsc{Push}(v)$

else

    if $\{v, w\}$ letzte Kante der Kantenliste von v **then**

        Mache erste Kante der Kantenliste zur *current edge*;

        $\textsc{Relabel}(v)$;

    else

        Ersetze *current edge* durch die nächste Kante der Kantenliste;

Strategien

- FIFO – aktive Knoten werden in einer Queue gehalten, nach dem *first-in first-out* Prinzip
  Laufzeit: $\mathcal{O}(n^3)$
- Highest Label – es wird jeweils der aktive Knoten mit maximalem d-Wert betrachtet
  Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$
- Excess Scaling – es wird nur Fluß von Knoten mit „genügend“ großem Überschuß zu Knoten mit “genügend“ kleinem Überschuß verschickt
  Laufzeit: $\mathcal{O}(nm + n^2 \log c_{max})$

Kor 1.11: Basisalg. terminiert mit einem maximalen Fluß

Lem 1.12: # Relabelings $\leq 2n^2$

Lem 1.13: # sat. Pushs $\leq nm$

Lem 1.14: # nicht-sat. Pushs $\leq 2n^2m$

Satz 1.15: Basisalg. hat Laufzeit $\mathcal{O}(n^3m)$

Satz 1.17: Basisalg. mit $\textsc{Push}/\textsc{Relabel}$ hat Laufzeit $\mathcal{O}(n^2m)$

Satz 1.18: Basisalg. mit $\textsc{Push}/\textsc{Relabel}$ und FIFO-Strategie hat Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$

Basisalgorithmus mit FIFO-Strategie:

```
// Initialisierung
⟨ ... wie bisher ... ⟩
Füge zusätzlich alle aktiven Knoten in eine Queue Q ein;
// Schleife
while Q nicht leer do
    Entferne vordersten Knoten v von Q;
    repeat
        PUSH/RELABEL(v);
        Falls dadurch ein Knoten w aktiv wird, füge ihn am
        Ende von Q an;
    until e_f(v) = 0 oder d(v) zugenommen hat;
    Falls v noch immer aktiv ist, füge v am Ende von Q an;
```

Weitere Netzwerkfluss-Probleme

<u>CIRCULATION</u>

Gegeben: Netzwerk $N = (V, A, l, u)$ mit $l, u : A \to \mathbb{R}$ und $l \leq u$

Frage: Gibt es einer *Zirkulation*, d.h. eine Abbildung $z : A \to \mathbb{R}$ mit $l \leq z \leq u$ und Flußerhaltung in *jedem* Knoten.

<u>MINIMUM CIRCULATION</u>

Gegeben: Netzwerk $N = (V, A, l, u)$ mit $l, u, c : A \to \mathbb{R}$ und $l \leq u$

Gesucht: Zirkulation mit $\sum_{a \in A} c(a)z(a) \stackrel{!}{=} \min$

$\langle$ ... vgl. Übung ... $\rangle$