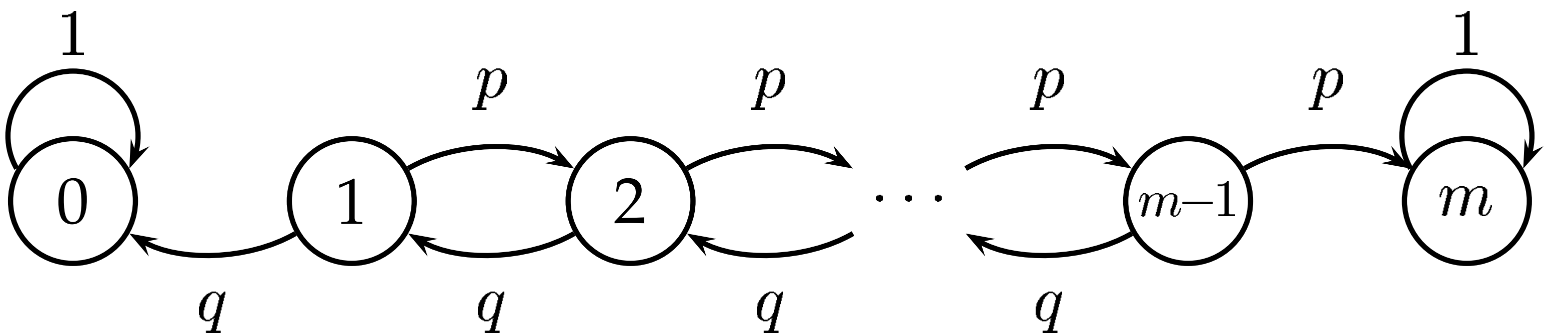
BEISPIEL: *Gambler's ruin problem*

A und B spielen Poker, bis einer von ihnen bankrott ist. A verfügt über Kapital a und B setzt eine Geldmenge in Höhe von $m - a$ aufs Spiel. Insgesamt sind also m Geldeinheiten am Spiel beteiligt. In jeder Pokerrunde setzen A und B jeweils eine Geldeinheit. A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p und B trägt folglich mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ den Sieg davon. Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten vom bisherigen Spielverlauf und insbesondere vom Kapitalstand der Spieler unabhängig sind.

Gesucht: W'keit mit der A den Spieler B in den Ruin treibt.



Die Nummer eines Zustands entspricht hier genau dem Kapital von Spieler A.

Definition: (*stationäre Verteilung*)

P sei die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$ nennen wir *stationäre Verteilung* der Markov-Kette.

Ein Zustand i heißt *absorbierend*, wenn aus ihm keine Übergänge herausführen, d.h. $p_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$ und folglich $p_{ii} = 1$.

Ein Zustand i heißt *transient*, wenn $f_{ii} < 1$, d..h. mit positiver Wahrscheinlichkeit $1 - f_{ii} > 0$ kehrt der Prozess nach einem Besuch in i nie mehr dorthin zurück.

Ein Zustand i mit $f_{ii} = 1$ heißt *rekurrent*.

BEM.:

- Für jeden aborbierenden Zustand i gilt: $\pi_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist eine stationäre Verteilung.
- Für jeden transienten Zustand i gilt: Für jede stationäre Verteilung π gilt $\pi_i = 0$.