Termine

Di 22. April	Osterdienstag, *keine Vorlesung*
Sa 24. Mai (!!)	Midterm (auf vielfachen Wunsch verschoben!)
Mo 9. Juni	Pfingstferien
Di 10. Juni	Pfingstferien
Fr 13. Juni	Vorlesung statt Übung
Sa 12. Juli	Endklausur
Fr 17. Oktober	Nachholklausur

BSP.: „Zweimaliges Würfeln mit einem idealen Würfel“

$\leadsto \ \Omega = \{(i,j) \mid 1 \le i,j \le n\}$

(i,j) := Elementarereignis, daß im ersten Wurf die Zahl i und im zweiten Wurf die Zahl j gewürfelt wird

Laplace-Prinzip: $\Pr[(i,j)] = \frac{1}{36} \ \ \forall i,j$

Ereignisse:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7

Dann gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$.

Wie groß ist $\Pr[A|B]$?

Intuition: $\Pr[A|B] = \Pr[A] = \frac{1}{2}$ ....

Nachrechnen:

$$\begin{aligned} A \cap B \quad &= \quad \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4), \\ &\qquad (4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\} \end{aligned}$$

und also

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[A]$$

Definition: (*U*nabhängigkeit)

Die Ereignisse A und B heißen *unabhängig*, wenn gilt: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.

Definition: (*U*nabhängigkeit mehrerer Ereignisse)

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (1) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Satz: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n^{s_n}],$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Definition: (*Zufallsvariable*) Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *(numerische) Zufallsvariable*.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt *diskret*.

<u>$\textsc{Bsp}$:</u> Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf".

W'keitsraum des Experiments: $\Omega := \{K, W\}^3$.
Zufallsvariable: $Y : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ $(=: W_Y)$.
z.B.: $Y(KWK) = 2, Y(KKK) = 3$.

Schreibweise: Für eine Zufallsvariable X schreiben wir statt $\Pr[X^{-1}(i)]$ meist $\Pr[$„$X = i$"$]$ bzw. kurz $\Pr[X = i]$.

Definition (*Erwartungswert*)

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

$\underline{\text{Bsp: (Forts.)}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^{3} i \cdot \Pr[Y = i] = 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\
&= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

BEISPIEL: **Casinobesuch**

(a) In einem Casino wird folgendes Spiel angeboten: Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Kopf“ zeigt. Sei k die Anzahl durchgeführter Würfe. Wenn k ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank k Euro. Andernfalls (k gerade) muss die Bank k Euro an den Spieler auszahlen.

(b) Was ändert sich, wenn statt um k Euro um 2^k Euro gespielt wird?

Rechenregeln für den Erwartungswert

Für alle Zufallsvariablen X gilt:

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Pr[\omega] \;=\; \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Für jede Zufallsvariable X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Monotonie des Erwartungswertes: Sind X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Linearität des Erwartungswertes, einfache Version: Für jede Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b.$$