WDH: Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to W_X$

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \;=\; \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

BSP: Würfel

Zufallsvariable X bezeichne die Augenzahl,

Zufallsvariable Y bezeichne das Quadrat der Augenzahl.

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} \;=\; 3,5$$

$$\mathbb{E}[Y] \;=\; \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} \;=\; \frac{91}{6}$$

Definition: (*Dichte und Verteilung einer Zufallsvariablen*)

Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

nennt man *(diskrete) Dichte(funktion)* von X. Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \le x] = \sum_{x \in W_X \,:\, x' \le x} \Pr[X = x']$$

heißt *Verteilung(sfunktion)* von X.

<u>BSP:</u> Münze wird dreimal geworfen. Y bezeichnet die Anzahl “Kopf”.

$$\begin{aligned}
f_Y(0) &= \Pr[Y = 0] = \Pr[WWW] = 1/8, \\
f_Y(1) &= \Pr[Y = 1] = \Pr[KWW] + \Pr[WKW] + \Pr[WWK] = 3/8, \\
f_Y(2) &= \Pr[Y = 2] = \Pr[KKW] + \Pr[KWK] + \Pr[WKK] = 3/8, \\
f_Y(3) &= \Pr[Y = 3] = \Pr[KKK] = 1/8
\end{aligned}$$

$$F_Y(2) = \Pr[Y \le 2] = f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2) = 7/8.$$

Definition (*bedingte Zufallsvariable*)

Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $\Pr[A] > 0$. Die *bedingte Zufallsvariable* $X|A$ besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) := \Pr[X = x \mid A] = \frac{\Pr[„X = x\text{“} \cap A]}{\Pr[A]}.$$

Satz der totalen W'keit, allg. Version:

Sei X eine Zufallsvariable und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ eine Partition von Ω mit $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n] > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k = \Omega$ und $\Pr[A_1], \Pr[A_2], \ldots > 0$ gilt analog

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i],$$

sofern die Erwartungswerte auf der rechten Seite alle existieren und die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbb{E}[X|A_i]| \cdot \Pr[A_i]$ konvergiert.

Definition: (*Varianz*)

Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Größe $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heißt *Standardabweichung* von X.

Rechenregeln für die Varianz:

Für alle Zufallsvariablen X gilt:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Für alle Zufallsvariablen X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X].$$

Beweise: Nachrechnen analog zu den gestrigen Beweisen zum Erwartungswert.

Beispiel: **Datenbanken**

Ein Datenbanksystem für Mehrbenutzerbetrieb soll implementiert werden. Die Bearbeitungsstrategie dieses Systems sei teilweise zufallsgesteuert. Die Zufallsvariable A_i beweichne die Anzahl der Anfragen, die pro Minute beantwortet werden können, wenn das System mit Strategie i arbeitet.

Bei Strategie 1 werden jeweils in der Hälfte der Fälle 50 Anfragen bzw. 150 Anfragen bearbeitet. Bei Strategie 2 werden in seltenen Fällen 2050 Anfragen pro Minute beantwortet, in $\frac{39}{40}$ der Fälle werden jedoch nur 50 Anfragen erledigt.

Welche Strategie soll man vorziehen?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_1] &= \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 150 \;=\; 100 \\ \mathbb{E}[A_2] &= \frac{1}{40} \cdot 2050 + \frac{39}{40} \cdot 50 \;=\; 100 \end{aligned}$$

Beide Systeme beantworten im Mittel pro Minute die selbe Anzahl von Anfragen.

Aber: Für ein reales System ist das Verhalten von Strategie 1 vorzuziehen, da sich diese “ausgeglichener” verhält. Auf den sehr selten auftretenden Spitzendurchsatz von Strategie 2 wird man sich in der Regel nicht verlassen wollen. Formal: $\mathrm{Var}[A_1] < \mathrm{Var}[A_2]$.

Mehrere Zufallsvariablen

Für Zufallsvariablen X und Y bezeichnet die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$

die *gemeinsame Dichte*.

Ausgehend von der gemeinsamen Dichte kann man auch wieder zu den Dichten der einzelnen Zufallsvariablen übergehen, indem man

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_x} f_{X,Y}(x,y)$$

setzt. Die Funktionen f_X und f_Y nennt man dann *Randdichten*.

Definition: (*Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)*

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

BEISPIEL: Skatspiel

Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während Y die Anzahl der Buben im Skat angibt.

Die Zufallsvariablen X und Y sind *abhängig*.

Intuitiv: Werte hängen voneinander ab: z.B. muss $Y = 0$ sein, wenn $X = 4$ gilt.

Formal:

$$0 = \Pr[X = 4, Y = 1] \neq \Pr[X = 4] \cdot \Pr[Y = 1] = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{1}}{\binom{32}{2}} > 0$$

Zusammengesetzte Zufallsvariablen

Zufallsvariablen können mit Hilfe einer Funktion g kombiniert werden:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine n-stellige Funktion. Dann definiert

$$Y := g(X_1, \ldots, X_n)$$

eine Zufallsvariable deren Dichte f_Y wie folgt gegeben ist:

$$f_Y(t) = \Pr[Y = t] = \Pr[\{\omega \mid Y(\omega) = t\}] = \Pr[\{\omega \mid g(X_1(\omega), \ldots, X_2(\omega)) = t\}].$$

BEISPIEL: **Würfel**

Ein Würfel werde zweimal geworfen. X bzw. Y bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Die Zufallsvariable $Z := X + Y$ entspricht dann der Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für Z gilt: $\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0, \Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1,3), (2,2), (3,1)\}] = \frac{3}{36}$ usw.

Allgemein??

Satz: (*Faltung*)

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$. Dann gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$

Beweis: Nachrechnen mit Hilfe des Satzes von der totalen W'keit.

Satz: (*Linearität des Erwartungswertes*)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$