Definition: (*irreduzibel)*

Eine Markov-Kette heißt *irreduzibel*, wenn es für alle Zustandspaare $i, j \in S$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Lemma: Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt: $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$ für beliebige Zustände $i, j \in S$. Zusätzlich gilt auch, dass die Erwartungswerte $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$ alle existieren.

Satz: Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung π und es gilt $\pi_j = 1/h_{jj}$ für alle $j \in S$.

Konvergenz in die stationäre Verteilung

- Für endliche irreduzible Markov-Ketten gilt: Es *gibt* eine (eindeutige) stationäre Verteilung π.
- Daraus folgt aber i.A. noch nicht, dass $\lim_{t\to\infty} q_t = \pi$ für jede Startverteilung q_0.

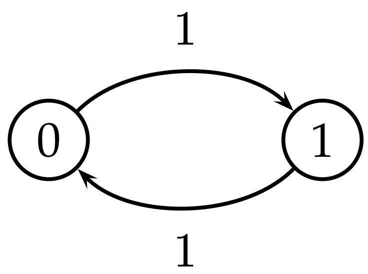
Definition: (*Periode eines Zustands*)

Die *Periode* eines Zustands j ist definiert als die größte Zahl $\xi \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode $\xi = 1$ heißt *aperiodisch*. Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

BEISPIEL:



Beide Zustände haben Periode 2.

Definition: (*ergodische Markov-Ketten*)

Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man *ergodisch*.

Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten:

Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \pi,$$

wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der Kette bezeichnet.

BEWEIS: siehe Literatur