BEISPIEL: (Paging-Strategien)

Modellannahmen:

- Wir nehmen an, dass das Programm aus insgesamt n verschiedenen Seiten besteht; diese nennt man die *logischen* Seiten des Programms.

- Der Hauptspeicher bestehe andererseits aus m *physikalischen* Seiten.

  (Interessant ist nur der Fall $m < n$, da nur dann Paging notwendig ist.)

- Die Zufallsvariable M_t bezeichne die Nummer der logischen Seite, auf die zum Zeitpunkt t zugegriffen wird.

  Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit mit der auf eine Seite zugegriffen wird, vom Zeitpunkt t unabhängig ist. Es gibt also Konstanten β_i mit $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, so dass für alle t gilt

$$\Pr[M_t = i] = \beta_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

  Zur Vereinfachung unserer Analyse nehmen wir an, dass die Zugriffe voneinander unabhängig erfolgen.

Übergangsmatrix: ($n = 3$)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & (1,2) & (2,1) & (1,3) & (3,1) & (2,3) & (3,2) \\
\hline
(1,2) & \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 \\
(2,1) & \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\
(1,3) & 0 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_3 & 0 & 0 \\
(3,1) & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_3 & \beta_2 & 0 \\
(2,3) & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \beta_3 \\
(3,2) & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 & \beta_3
\end{array}\quad .
$$

Es gilt: Markov-Kette ist irreduzibel und aperiodisch.

Stationäre Verteilung erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \pi &= \pi \cdot P \\ 1 &= \sum_{(i,j)\in S} \pi_{(i,j)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\pi_{(i,j)} = \frac{\beta_i \beta_j}{1-\beta_i}.$$

und somit

$$\Pr[\text{“Paging”}] = \sum_{(i,j)\in S} (1-\beta_i-\beta_j)\frac{\beta_i \beta_j}{1-\beta_i}.$$

Definition: (*doppeltstochastische Matrizen*)

Eine $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$ heißt *stochastisch*, falls alle Einträge p_{ij} nichtnegativ sind und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \qquad \text{für alle } i = 0, \ldots, n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich Eins, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \qquad \text{für alle } j = 0, \ldots, n-1,$$

so nennt man P *doppeltstochastisch*.

Beispiel: Jede *symmetrische* Übergangsmatrix P ist insbesondere auch doppeltstochastisch.

Lemma: Ist P eine doppeltstochastische $n \times n$ Matrix, so ist $\pi = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links:

$$\pi = \pi \cdot P.$$

Satz: Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit doppeltstochastischer Übergangsmatrix gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{t \to \infty} q_t = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}),$$

wobei n die Kardinalität der Zustandsmenge bezeichne.