Aufgabe:

Eine sehr seltene Krankheit tritt mit Wahrscheinlichkeit $1/100000$ auf. Ein Antikörpertest für diese Krankheit erkennt eine Infektion mit Wahrscheinlichkeit $0,95$. Gesunde Menschen werden mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,005$ irrtümlich als krank eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test tatsächlich eine Infektion vorliegt?

Lösung

I bezeichne das Ereignis “Infektion” und T steht für ein positives Testergebnis. Dann folgt mit dem Satz von Bayes:

$$\Pr[I|T] = \frac{\Pr[T|I]\Pr[I]}{\Pr[T|I]\Pr[I]+\Pr[T|\bar{I}]\Pr[\bar{I}]} = 0,00189$$

Aufgabe:

Es seien X_1, X_2 und X_3 drei (nicht notwendigerweise unabhängige) Indikatorvariablen und $X = X_1 + X_2 + X_3$. Weiter sei $\mathbb{E}[X] = 1{,}5$. Bestimmen Sie obere und untere Schranken für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = 3]$. Geben Sie jeweils ein Beispiel an, das zeigt, dass Ihre Schranke bestmöglich ist.

Lösung

Aus der Markov-Ungleichung folgt $\Pr[X = 3] \leq \mathbb{E}[X]/3 = 0{,}5$. Für $X_1 = X_2 = X_3 = Y$, wobei Y Bernoulli verteilt mit W'keit $1/2$ sei, wird diese Schranke angenommen: Aus $\mathbb{E}[X] = 3\mathbb{E}[X_1]$ folgt $\mathbb{E}[X_1] = 0{,}5$. Weiter gilt $\Pr[X = 3] = \Pr[X_1 = 1] = 0{,}5$.

Für die untere Schranke werfen wir einen idealen Würfel und setzen $X_1 = 1$ ($X_2 = 1$) genau dann, wenn die Augenzahl gerade (ungerade) ist, und $X_3 = 1$ genau dann, wenn die Augenzahl kleiner gleich drei ist. Dann gilt $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = 0{,}5$. Da andererseits immer X_1 oder X_2 gleich Null ist, folgt $\Pr[X = 3] = 0$.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ eine zulässige Dichte ist. Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?

Lösung

Z.z.: a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

b) Integral über $\mathbb{R}$ ist 1.

a) Klar, nach Def. der Exponentialfunktion.

b) Wir integrieren f und erhalten mit der Substitution $u := -e^{-x}$ und $\mathrm{d}u = e^{-x}\,\mathrm{d}x$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-e^{-t}} e^{u}\,\mathrm{d}u = e^{-e^{-t}}$$

und somit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Aufgabe:

Ein Stab der Länge l werde an einer zufällig gewählten Stelle in zwei Teile zerbrochen. Sei V die Länge des kleineren Teilstabs. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[V]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[V]$.

Lösung

Sei U gleichverteilt auf $[0, l]$ und $g(x) := \min\{x, l - x\}$, d.h. $V := g(U)$.

$$\mathbb{E}[V] = \int_0^l g(x)(1/l)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{l-x}{l}\,\mathrm{d}x$$

Substitution $u := l - x$ und $\mathrm{d}u := -\,\mathrm{d}x$:

$$l\mathbb{E}[V] = \int_0^{\frac{l}{2}} x\,\mathrm{d}x - \int u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x\,\mathrm{d}x = \frac{l^2}{4} \implies \mathbb{E}[V] = \frac{l}{4}$$

Analog für Varianz:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[V] &= \mathbb{E}[(V - \mathbb{E}[V])^2] = \int_0^l (g(x) - \tfrac{l}{4})^2 \tfrac{1}{l}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} (x - \tfrac{l}{4})^2\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{2}{l}\int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{4}} u^2\,\mathrm{d}u = \tfrac{l^2}{48} \end{aligned}$$