Stochastischen Prozess

Unter einem stochastischer Prozess versteht man eine Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$, die das Verhalten eines Systems zu verschiedenen Zeitpunkten t angeben.

Wenn wir $T = \mathbb{N}_0$ annehmen, sprechen wir von einem stochastischen Prozess mit diskreter Zeit.

Lässt man andererseits $T = \mathbb{R}_0^+$ zu, so spricht man von stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit.

$\textsc{Beachte:}$ Die Zufallsvariablen X_t dürfen von einander Zufallsvariablen abhängig sein!

Eine besonders einfache Art von stochastischen Prozessen sind so genannte *Markov-Ketten*. Diese haben die Eigenschaft, dass der nächste Zustand des Prozesses zwar vom aktuellen Zustand abhängen darf, nicht aber von der Historie, d.h. von der Art und Weise, wie der aktuelle Zustand erreicht wurde.

BEISPIEL: Netzwerkverbindung

Wir nehmen an, dass von Rechner A in einem festen Zeitraster (z.B. im Abstand von jeweils einer Sekunde) Datenpakete an Rechner B übertragen werden, um die Funktionsfähigkeit der Verbindung zu überprüfen.

Wir interessieren uns zum Zeitpunkt t ($t \in \mathbb{N}_0$ sei die Anzahl der bis dahin durchgeführten Übertragungsversuche) für die Zufallsvariable

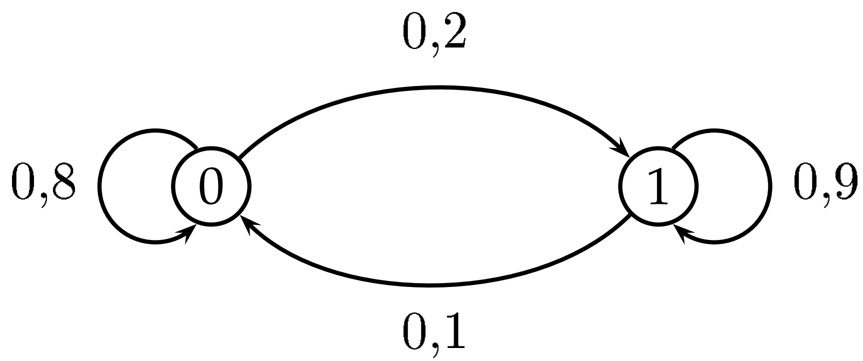
$$X_t := \begin{cases} 1 & \text{falls Übertragung im } t\text{-ten Schritt erfolgreich,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Normalfall nehmen wir an, dass Rechner B mit Wahrscheinlichkeit $0{,}9$ erreicht werden kann. Wenn jedoch beim vorherigen Versuch ein Fehler aufgetreten ist, so setzen wir diese Wahrscheinlichkeit mit $0{,}2$ an. Ferner gehen wir davon aus, dass diese Wahrscheinlichkeiten nur vom Ausgang des unmittelbar vorangehenden Versuchs abhängen, nicht aber von früheren Versuchen. Formal schreiben wir:

$$\Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1] = 0{,}9 \quad \text{und} \quad \Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0] = 0{,}2\ .$$

Da die Übertragung zum Zeitpunkt $t+1$ entweder erfolgreich oder nicht erfolgreich ist, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die beiden verbleibenden Möglichkeiten unmittelbar aus der Tatsache, dass in einem Wahrscheinlichkeitsraum die Summe über alle Elementarereignisse Eins ergeben muss:

$$\Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1] = 0{,}1 \quad \text{und} \quad \Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0] = 0{,}8\ .$$



Übergangsdiagramm

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q_0 = (0, 1).$$

Übergangsmatrix und Startverteilung

Eine Irrfahrt (engl. Random Walk) auf dem Graphen entspricht einer Zustandsfolge und wir können ausgehend von einem Startzustand ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System ebendiese Zustandsfolge durchläuft.

Definition: (*Markov-Kette mit diskreter Zeit*)

Eine Markov-Kette mit diskreter Zeit über der Zustandsmenge $S = \{0, \ldots, n-1\}$ besteht aus einer unendlichen Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Wertemenge S sowie einer *Startverteilung* q_0 mit $q_0^T \in \mathbb{R}^n$. Die Komponenten von q_0 sind hierbei positiv und addieren sich zu Eins. Für jede Indexmenge $I \subseteq \{0, \ldots, t-1\}$ und beliebige Zustände i, j, s_k ($k \in I$) gilt

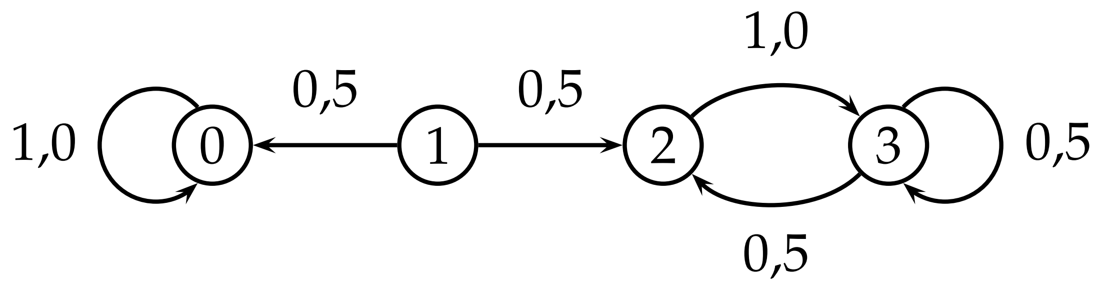
$$\Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i, \ \forall k \in I: \ X_k = s_k] = \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]. \tag{1}$$

Sind die Werte

$$p_{ij} := \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]$$

von t unabhängig, so nennt man die Markov-Kette *(zeit)homogen*. In diesem Fall definiert man die *Übergangsmatrix* durch $P = (p_{ij})_{0 \leq i,j < n}$. Wenn man $S = \mathbb{N}_0$ zulässt, so spricht man von einer *unendlichen Markov-Kette*.

Die Bedingung (1) nennt man *Markov-Bedingung*. Anschaulich besagt sie: Wenn wir den Zustand i zum Zeitpunkt t kennen, so hängt die Übergangswahrscheinlichkeit zum Folgezustand j nur von i und j ab.


1,0
0
0,5
1
0,5
2
1,0
3
0,5
0,5

Lemma

Für die erwarteten Übergangszeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \quad \text{für alle } i, j \in S, \tag{2}$$

sofern die Erwartungswerte h_{ij} und h_{kj} existieren. Für die Ankunftswahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \quad \text{für alle } i, j \in S. \tag{3}$$