Aufgabe

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Pr[\omega] = 1/5$. $A := \{1, 2, 5\}$, $B := \{2, 4\}$. Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung

Nein. Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, falls gilt: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$. Im vorliegenden Fall gilt:

$$\frac{1}{5} = \Pr[\{2\}] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}.$$

Aufgabe

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X, die binomialverteilt ist mit Parametern $n = 2$ und $p = 1/3$. Skizzieren Sie das Ergebnis graphisch. Markieren Sie insbesondere Lage und Höhe der Sprungstellen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X \leq 1/7]$?

Lösung

Die Binomialverteilung mit Parametern $n = 2$ und $p = 1/3$ hat die (diskrete) Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{2}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} & \text{falls } x \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} & 0 \leq x < 1 \\ (\frac{2}{3})^2 + 2\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{8}{9} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Daraus liest man die gesuchte Wahrscheinlichkeit sofort ab: $\Pr[X \leq 1/7] = (2/3)^2$.

Aufgabe

1. Vier Tetraeder, deren vier Seiten jeweils mit den Zahlen $1, 1, 2, 3$ beschriftet sind, werden gleichzeitig auf den Tisch geworfen. Nehmen Sie an, daß jede Seite mit gleicher WS $1/4$ unten zu liegen kommt. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Summe der Zahlen, die auf den unten liegenden Seiten der Tetraeder stehen.

2. Jetzt werfen Sie n Tetraeder wie oben. Normieren Sie die Summe der unten liegenden Zahlen, indem Sie deren Erwartungswert abziehen und dann das Ergebnis durch die Standardabweichung teilen. Das Ergebnis sei mit $Y^{(n)}$ bezeichnet. Gegen welche Funktion konvergiert die Verteilungsfunktion von $Y^{(n)}$, wenn n gegen unendlich geht?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung

1. Sei X_i die unten liegende Zahl des i–ten Tetraeders. Dann bezeichnet $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ die Summe der unten liegenden Zahlen. Gesucht ist $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

Für alle $i = 1, 2, 3, 4$ gilt nach Voraussetzung:

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{4} \cdot (1 + 1 + 2 + 3) = \frac{7}{4}$$

und

$$\mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[(X_i)^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + 1 + 4 + 9) = \frac{15}{4} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_4] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_4] = 4 \cdot \frac{7}{4} = 7.$$

Wegen der Linearität der Varianz bei unabhängigen Zufallsvariablen gilt:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_4] = \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \mathrm{Var}[X_4] = 4 \cdot \frac{11}{16} = \frac{11}{4}.$$

2. Die Verteilungsfunktion $F_{Y^{(n)}}(\cdot)$ von $Y^{(n)}$ konvergiert punktweise gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(\cdot, 0, 1)$ der Standardnormalverteilung. Dies ist die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes, der angewendet werden darf, weil Varianz und Summe der X_i endlich sind.

Aufgabe

Betrachten Sie folgendes Spiel. Ein miserabler Schütze schießt gleichverteilt auf das Intervall $[-1, 1]$. Je näher er die Null kommt, um so höher ist sein Preisgeld. Genauer gesagt, bekommt er $100 \cdot (1 - |x|)$ Euro, wenn er den Wert x trifft. Wie hoch ist sein erwarteter Gewinn?

Lösung

Es bezeichne X die Lage des Treffers des Schützen. Der Gewinn G des Schützen ist $G = g(X)$ wobei $g(x) = 100 \cdot (1 - |x|)$.

Für die Dichte der Zufallsvaraiblen X gilt nach Aufgabenstellung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit berechnet sich der erwartete Gewinn wie folgt:

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-1}^{+1} g(t) f_X(t) dt = \int_{-1}^{+1} 100 \cdot (1 - |t|) \cdot \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^{0} 100 \cdot (1 + t) \cdot \frac{1}{2} dt + \int_{0}^{-1} 100 \cdot (1 - t) \cdot \frac{1}{2} dt = 100 - 2 \cdot 50 \cdot \int_{0}^{1} t dt = 50.$$

Aufgabe

Erklären Sie anhand einer Skizze, was man unter dem *Tail* einer Verteilung versteht. Welche Techniken kennen Sie, um zu zeigen, daß der Tail klein ist? Nennen Sie (mindestens) drei Techniken. Unter welchen Voraussetzungen kann man diese Techniken anwenden?

Lösung

Plottet man die Dichte einer Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$, so sieht diese häufig einer Gaußverteilung zumindest ähnlich. Die meiste Masse (Flächeninhalt unter der Kurve) ist in einer relativ kleinen Umgebung um der Erwartungswert herum konzentriert. Außerhalb dieser Umgebung fällt die Dichte häufig schnell ab. Diese Kurven, genauer der Flächeninhalt darunter, heißen ihrer Form wegen Tails.

- Markov–Ungleichung. X muß nichtnegative Werte annehmen. Tail $\Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$.
- Chebyshev–Ungleichung. Linker und rechter Tail zusammen $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \mathrm{Var}[X]/t^2$.
- Chernov–Ungleichung(en). X muß die Summe von unabhängigen $0/1$ Zufallsvariablen sein.

Dann ist, beispielsweise,

$$\Pr[X \geq (1+\varepsilon)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}[X]},$$

wenn $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Es gibt noch eine ganzen Sammlung von ähnlichen Ungleichungen, maßgeschneidert für verschiedene Anwendungen.

- Daneben gibt es noch viele andere Ungleichungen, die exponentielle Schranken für Tails von allgemeiner definierten Zufallsvariablen als denen, die als Summen von unabhängigen $0/1$–ZV entstehen. Siehe weiterführende Vorlesungen.

Aufgabe

Nehmen Sie an, daß die Dauer zwischen der Ankunft einer Anfrage bei einer Telefonauskunft und der nächsten Anfrage exponentialverteilt ist.

1. Warum ist das eine sinnvolle Annahme?
2. Wenn wir uns eine beliebige Minute herausgreifen, dann sei die Wahrscheinlichkeit, daß in dieser Minute kein Anruf eingeht, gleich 0.01. Mit welcher Rate rufen die Anrufer bei der Telefonauskunft an, d.h. was ist der Parameter der obigen Exponentialverteilung?
3. Wie groß ist die WS, daß in einer beliebig herausgegriffenen Minute genau 2 Anrufe eintreffen?

Lösung

1. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, daß die Exponentialverteilung dadurch charakterisiert werden kann, daß sie gedächtnislos ist. Wenn wir einen beliebigen Zeitpunkt wählen, dann ist die Wartezeit bis zum nächsten Anruf genauso verteilt, wie zu jedem anderen Zeitpunkt. Das ist wohl eine vernünftige Annahme, wenn wir mal davon absehen, daß reale Menschen zu gewissen Tageszeiten häufiger anrufen, als zu anderen.

2. In der Vorlesung haben wir folgenden Satz gezeigt. Sind X_i unabhängige, exponentialverteile Zufallsvariablen mit Parameter λ, so ist

$$N := \max\{n \mid X_1 + \cdots + X_n \leq 1\}$$

Poisson-verteilt mit Parameter λ.

Also ist $Po_\lambda(0) = e^{-\lambda} = 0.01$. Daraus folgt $\lambda = \ln(100) = 4.605\ldots$.

3. Wir müssen $Po_\lambda(2) = e^{-\lambda}\lambda^2/2!$ ausrechnen. Dies ist gleich $0.1060\ldots$.

Aufgabe

Nehmen Sie an, die Dauer eines Telefongesprächs sei expontialverteilt mit Rate μ. An einer Telefonzelle kommen Leute exponentialverteilt mit Rate $\lambda < \mu$ an.

1. Was können Sie über die stationäre Verteilung der Warteschlange sagen? Wieviele Leute stehen im Durchschnitt an der Zelle an?
2. Wie lange müssen Sie im Mittel warten, bis Sie ihr Telefongespräch beendet haben?

Lösung

Dies ist eine klassische $M/M/1$-Warteschlange.

1. Aus der Vorlesung wissen wir, dass es für $\rho := \lambda/\mu < 1$ eine stationäre Verteilung gibt und diese durch $\pi_k := (1-\rho)\rho^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben ist. Die erwartete Anzahl von Leuten in der Schlange ist
$$\mathbb{E}[N'] = \sum_{i \geq 1} (i-1)\pi_i = \sum_{i \geq 0} i(1-\rho)\rho^{i+1} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$
2. Nach der Formel von Little gilt für die Verweildauer R im System $\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}[N]/\lambda$, wobei $\mathbb{E}[N] = \rho/(1-\rho)$.

Aufgabe

Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung $f_X(\cdot)$ gleich $f(\cdot, \theta)$ ist. Die unabhängig wie X verteilten Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ erzeugen eine Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1. Beschreiben Sie, wie Sie aus einer Stichprobe x einen erwartungstreuen Schätzer U für den Erwartungswert von X bestimmen.

2. Beweisen Sie, daß der von Ihnen gewählte Schätzer U ist.

3. Sei für den Rest der Aufgabe speziell X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Die Varianz σ^2 sei bekannt, μ ist der unbekannte Parameter. Wie ist U verteilt? Insbesondere, wie groß ist die Varianz von U?

4. Fertigen Sie eine beschriftete Skizze der Verteilung von U an.

5. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Wert $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$, so daß

$$\Pr[U - \tilde{c} \leq \mu \leq U + \tilde{c}] \geq 90\%.$$

   Dabei dürfen Sie verwenden, daß das 0.95–Quantil der Standardnormalverteilung den Wert 1.64 hat.

Lösung

1. Aus der Vorlesung wissen wir, dass das arithmetische Mittel $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ ein erwartungstreuen Schätzer für den Erwartungswert ist.

2. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X].$$

3. X ist als Linearkombination von normalverteilten Zufallsvariablen wieder Normalverteilt mit Parametern μ und Varianz σ^2/n.

4. Vgl. 10 DM Schein.

5. Wir formen erst einmal um, um zur normierten ZV $\tilde{U} := (U - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ übergehen zu können.

$$\begin{aligned}
\Pr[U - \tilde{c} \le \mu \le U + \tilde{c}] &= \Pr[-\tilde{c} \le U - \mu \le \tilde{c}] \\
&= \Pr[-\tilde{c} \le U - \mu \le \tilde{c}] = \Pr[-c \le \tilde{U} \le c]
\end{aligned}$$

Dabei ist $c := \tilde{c}/(\sigma/\sqrt{n})$. Also wählen wir $c := 1.64$. Dann ist die Wahrscheinlickeit des rechten Tails gleich 5%, und aus Symmetriegründen auch des linken.

Die Wahrscheinlichkeit, die wir eigentlich abschätzen wollten ist also mindestens 90%. Für jede noch kleinere Wahl von c wäre sie kleiner.

Zuletzt können wir wieder nach $\tilde{c}$ auflösen:

$$\tilde{c} = 1.64 \cdot \sigma/\sqrt{n}.$$

Aufgabe

Sei S_{52} die Permutationsgruppe von 52 Elementen, dies entspricht der Menge der Anordnungen eines Stapels von 52 Karten. Ein Croupier hat die Eigenart, die Karten zu mischen, indem er (unter Benutzung eines Rouletts) in jedem Schritt jeweils unabhängig und gleichverteilt zwei Zufallszahlen i und j in $\{0, \ldots, 36\}$ wählt, und dann die Karte an der Position i im Stapel mit der Karte an Position $(i + j) \bmod 52$ vertauscht.

Beweisen Sie, daß der Croupier mit dieser Methode zumindest asymptotisch die Gleichverteilung auf der Menge aller möglichen Anordnungen des Kartenstapels erzeugt.

Lösungsskizze

Wir modellieren den Mischvorgang durch eine Markov-Kette. Die Zustände entsprechen der Menge der Anordnungen der 52 Karten.

Für die Zustandsübergänge $p_{\sigma,\tau}$ für zwei Permutationen σ und τ gilt:

$p_{\sigma,\tau} > 0$ genau dann, wenn sich σ und τ nur an den Positionen i und k unterscheiden, und $0 \leq (k - i) \bmod 52 \leq 36$ gilt.

Wegen $p_{\sigma,\sigma} > 0$ für alle Permutationen σ ist die Markov-Kette aperiodisch.

Dass die Markov-Kette ist auch irreduzibel ist, sieht man wie folgt ein: durch Hintereinanderschalten zweier Vertauschungen der obigen Form kann man jede beliebige Vertauschung realisieren. Somit folgt die ehauptung aus dem entsprechenden Resultat der Vorlesung.

Bestimmung des stationären Verteilung: Übergangsmatrix ist doppelt-stochastisch, die stationäre Verteilung ist daher die Gleichverteilung.

Aufgabe

a) Es seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit den (kontinuierlichen) Dichten f_X und f_Y gegeben; $W_X, W_Y = \mathbb{R}$. Ferner sei C eine von X und Y unabhängige Bernoulli-Zufallsvariable mit $\Pr[C = 1] = p$ und $\Pr[C = 0] = 1 - p$. Wir definieren

$$Z := \begin{cases} X & \text{falls } C = 1, \\ Y & \text{falls } C = 0. \end{cases}$$

Was ist der Wertebereich von Z? Geben Sie die (kontinuierliche) Dichte f_Z in Abhängigkeit von f_X und f_Y an.

b) Seien X und Y wie in a), aber wir betrachten nun $Z' := pX + (1 - p)Y$. Ist die Dichte von Z' gleich der von Z? Drücken Sie $\mathrm{Var}[Z']$ durch $\mathrm{Var}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y]$ aus.

Aufgabe

Die Zufallsvariable X besitze die Dichte f_X. Drücken Sie die Verteilungsfunktion von $Y := aX + b$ durch f_X aus, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für die kontinuierliche Dichte von Y ab. (Achtung: Fallunterscheidung!)

Aufgabe

Ein Rechnernetz enthalte n Router, die jeder im Mittel t Zeiteinheiten zuverlässig laufen, bis es zu einem Absturz oder ähnlichen Problemen kommt. Wir nehmen an, dass die Zeitdauer bis zum Absturz eines einzelnen Routers exponentialverteilt ist. Die Abstürze der Router erfolgen unabhängig. Alle Router werden für einen reibungslosen Netzbetrieb benötigt. Geben Sie die Verteilung der Zeitdauer T bis zur ersten Störung des Netzes an und berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$.

Aufgabe

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig wie X verteilte Stichprobenvariablen. Dabei sei X exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter λ. Berechnen Sie einen ML-Schätzer für λ.