Nachtrag zum gestrigen Kartenbeispiel:

Ein **Skatblatt** besteht aus 32 Karten. Es gibt vier Farben: Herz, Karo, Kreuz und Pik und in jeder Farbe die Karten 7, 8, 9, 10, Bube, Dame König und Ass.

Ein **Pokerblatt** besteht aus 52 Karten: zum Skatblatt werden in den vier Farben jeweils noch die Karten 2,3,4,5 und 6 hinzugefügt.

Ein Straight Flush besteht aus 5 aufeinanderfolgenden Karten in der gleichen Farbe.

BSP.: „Poker“

Vereinfachte Version: 2 Spieler, kein Kartentausch

Spieler A: besitzt 4 Asse und Herz 2

Frage: Mit welcher W’keit verliert Spieler A?

Spielregeln: Spieler A verliert genau dann, wenn Spieler B einen Straight Flush hat.

Also:

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„}A\text{ verliert“}] \\
&= \Pr[\text{„}B\text{ hat Straight Flush“}] \\
&= \frac{\#\text{Mögl. für Straight Flush}}{\text{Größe des W'raumes}} \qquad [\rightarrow \text{ Prinzip von Laplace}] \\
&= \frac{3\cdot 8+7}{\binom{52-5}{5}} = 1.19\cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Verändertes Szenario:

A hat Karten gezinkt und kann daher erkennen, daß B nur Kreuz hat

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„}A\text{ verliert“}] \\
&= \frac{\#\text{Mögl. für Straight Flush}}{\text{Größe des W'raumes}} \\
&= \frac{8}{\binom{12}{5}} \approx 0.01
\end{aligned}$$

Definition (*bedingte Wahrscheinlichkeit*)

A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Rechenregel:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B].$$

Multiplikationssatz:

Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}].$$

Beispiel: **Zweikinderproblem**

Wir sind zu Gast bei einer Familie mit zwei Kindern. Wir nehmen an, dass bei der Geburt eines Kindes beide Geschlechter gleich wahrscheinlich sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind, wenn wir bereits ein Kind kennen gelernt haben und somit wissen, dass es sich dabei um ein Mädchen handelt?

Die Frage verführt zur spontanen Antwort $\frac{1}{2}$, da für das Geschlecht des unbekannten Kindes immer noch zwei Möglichkeiten bestehen. Von diesen ist scheinbar keine bevorzugt, da das Geschlecht des Geschwisterkindes keine Auswirkung auf das Geschlecht des bislang unbekannten Kindes hat.

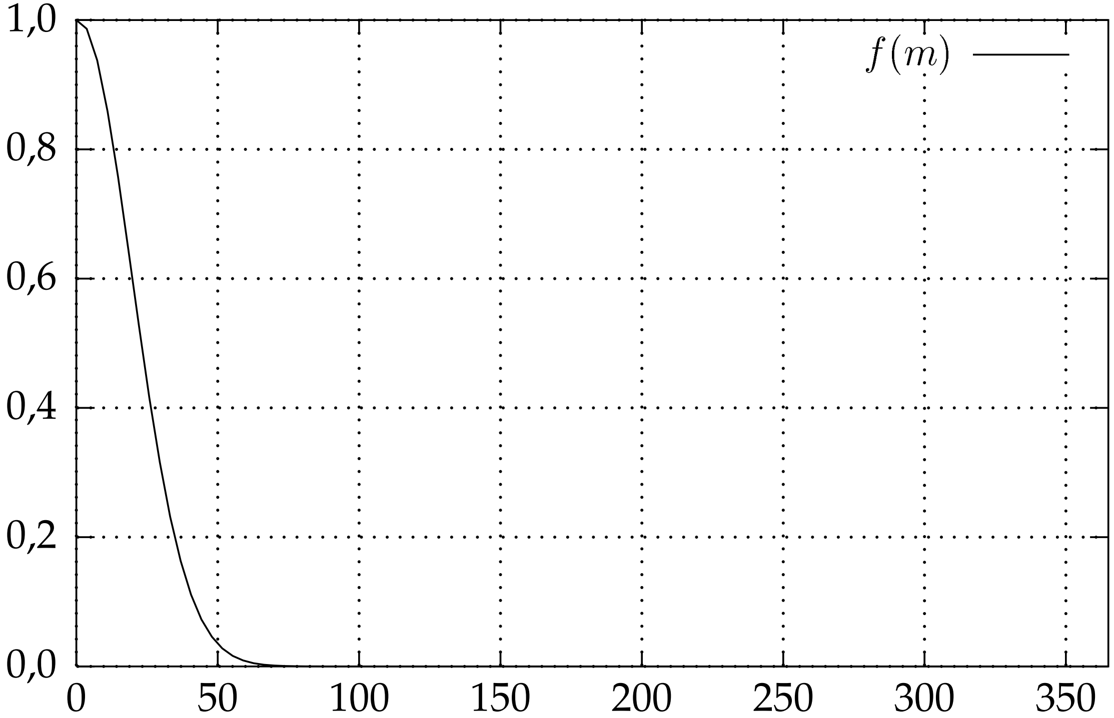
Aber ...

BEISPIEL: **Geburtstagsproblem**

Wir möchten folgende Frage beantworten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Dieses Problem formulieren wir folgendermaßen um: Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Im Fall des Geburtstagsproblems gilt (wenn man von Schaltjahren absieht und Gleichwahrscheinlichkeit der Geburtstage annimmt) $n = 365$.



Verlauf der Funktion

$$f(m) := e^{-m(m-1)/(2\cdot 365)}.$$

Bei 50 Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, bereits größer als 95%.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Beispiel: **Ziegenproblem**

Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen, um ihren Gewinn zu ermitteln. Hinter einer davon befindet sich ein teures Auto, während hinter den beiden anderen als Trostpreis jeweils eine Ziege wartet. Um die Spannung zu steigern, öffnet der Showmaster, nachdem die Kandidatin gewählt hat, eine der beiden übrigen Türen, hinter der sich (wie er weiß) eine Ziege befindet, und bietet der Kandidatin an, die Tür noch einmal zu wechseln. Soll sie dieses Angebot annehmen?

Satz von Bayes:

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$