

---

## Internet-Algorithmik

---

Abgabetermin: 16.06.2004 vor der Vorlesung

Es seien das Universum  $\mathcal{U} = [1, N]$  und die Hash-Tabelle  $T = [1, n]$  gegeben.  
Eine Klasse  $\mathcal{H}$  von Hash-Funktionen heißt *paarweise unabhängig* genau dann, wenn

$$\frac{|\{h \in \mathcal{H} | h(x) = k_1, h(y) = k_2\}|}{|\mathcal{H}|} = \frac{1}{n^2}$$

für alle  $x, y \in \mathcal{U}$  mit  $x \neq y$  und alle  $k_1, k_2 \in T$  gilt.

### Aufgabe 1

Sei  $p$  eine Primzahl und  $N = n = p$ . Für  $a, b \in \mathbb{Z}_p$  sei  $h_{a,b}$  definiert als  $h_{a,b}(i) = a \cdot i + b \pmod p$ . Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{H} = \{h_{a,b} | a, b \in \mathbb{Z}_p\}$  eine Klasse von paarweise unabhängigen Hash-Funktionen ist.

### Aufgabe 2

Sei  $N = 2^k$  und  $n = 2^l$ . Sei  $M$  eine  $k \times l$  Matrix mit Einträgen aus  $\{0, 1\}$  und  $b$  ein  $l$ -dimensionaler Vektor. Für  $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i \in \mathcal{U}$  definieren wir

$$h_M(x) = \sum_{j=0}^{l-1} 2^j \cdot \left[ \left( \left( \sum_{i=0}^{k-1} M_{j,i} x_i \right) + b_j \right) \pmod 2 \right].$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{H} = \{h_{M,b} | M \text{ ist eine } k \times l \text{ Matrix, } b \text{ ist ein Vektor mit Dimension } l\}$$

eine Klasse von paarweise unabhängigen Hash-Funktionen ist.

### Aufgabe 3

Sei  $\mathcal{H}$  eine Klasse von paarweise unabhängigen Hash-Funktionen. Sei  $S \subseteq \mathcal{U}$  eine Menge von Schlüsseln. Sei  $\alpha = \frac{|S|}{n}$ . Zeigen Sie, dass

$$\left( \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) \leq \mathbb{P}[\text{es gibt ein } x \in S \text{ mit } h(x) = t] \leq \alpha$$

gilt, wobei die Wahrscheinlichkeit über die zufällige Auswahl von  $h \in \mathcal{H}$  und  $t \in T$  definiert ist.

## Aufgabe 4

Schreiben Sie ein Java-Programm, welches die exponentiellen Histogramme aus der Vorlesung implementiert. Erstellen Sie dazu eine Klasse `ExponentialHistogram` mit einem Konstruktor, der als Parameter die Werte `int k`, `int N` erhält, wobei `k` dem Wert  $\lceil 1/\epsilon \rceil$  entspricht und `N` die Fenstergröße ist. Die Klasse sollte desweiteren die öffentlichen Methoden `void nextItem(bool v)` sowie `int currentCount()` haben.

Schreiben Sie eine `main`-Methode, die die Parameter `k` und `N` als Argumente liest (`Integer.parseInt()`) und einen Datenstrom von der Standard-Eingabe liest. Der Datenstrom besteht aus den Buchstaben `0` und `1`, die dem Histogramm übergeben werden sollen. Nach jedem Element soll der aktuelle Wert der Anzahl der Einsen ausgegeben werden.

Bemühen Sie sich um Platz- und Zeiteffizienz und schicken Sie Ihren Source-Code (und nur diesen) an `maass@in.tum.de`. Dabei sollten es sich nur um eine Datei `ExponentialHistogram.java` handeln, weitere ggf. benötigte Klassen sind als Unterklassen zu definieren.