Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Moritz Maaß

Sommersemester 2003/04
Übungsblatt 6
30. Juni 2004

Internet-Algorithmik

Abgabetermin: 14.07.2004 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

Für einen gewichteten, ungerichteten Graphen $G = (V, E, w)$ heißt eine Kante $\{u, v\} \in E$ *redundant*, falls es einen Knoten $x \in V \setminus \{u, v\}$ gibt, so dass $w(\{u, v\}) \geq d_G(u, x) + d_G(x, v)$ gilt.

Zeigen Sie: Gibt es für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$ eine exakte Realisierung durch einen gewichteten, ungerichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $d_G(i, j) = a_{ij}$ für alle $i, j \in V$, $i \neq j$, der ohne redundante Kanten auskommt, so ist G eindeutig unter allen exakten Realisierungen von A.

Aufgabe 2

Welche Eigenschaften muss eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$ haben, damit es einen einfachen, ungerichteten, ungewichteten Graphen gibt, der A exakt realisiert? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Der HITS-Algorithmus berechnet *Authority*- und *Hub*-Werte iterativ wie folgt:

$$a'_{i+1}(x) = \sum_{(y,x) \in E} h_i(y) \quad \text{und} \quad h'_{i+1}(x) = \sum_{(x,y) \in E} a_i(y)$$

mit geigneter Normierung (z.B. Euklidische Norm)

$$a_{i+1}(x) = \frac{a'_{i+1}(x)}{||a'_{i+1}(x)||_2} \quad \text{und} \quad h_{i+1}(x) = \frac{h'_{i+1}(x)}{||h'_{i+1}(x)||_2}.$$

Dann ergeben sich die *Authority*- und *Hub*-Werte als

$$a(x) = \lim_{i \to \infty} a_i(x) \quad \text{und} \quad h(x) = \lim_{i \to \infty} h_i(x).$$

Berechnen Sie die *Authority*- und *Hub*-Werte für

(i) gerichtete Kreise C_n der Länge n,

(ii) gerichtete Pfade P_n der Länge n,

(iii) Graphen $G = G_1 \uplus G_2$ (wobei die Werte für G_1 und G_2 als bekannt vorausgesetzt werden und $\uplus$ die disjunkte Vereinigung zweier Graphen bezeichnet).

Aufgabe 4

Geben Sie eine charakterisierende Bedingung dafür an, dass in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ die *Authority*- und *Hub*-Werte für alle Knoten $v \in V$ gleich sind. Geben Sie möglichst große Graphklassen an, die dieser Bedingung genügen.