Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Stefan Eckhardt

Wintersemester 2004/05
Übungsblatt 0b
29. Oktober 2004

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: —

Aufgabe 1

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* auf dem Invervall I, falls für jedes Punktepaar $x_1, x_2 \in I$ gilt

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

für $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha + \beta = 1$. Gilt statt „$\leq$" die Relation „$\geq$", so nennt man die Funktion *konkav*. Zeigen die per Induktion die
Jensensche Ungleichung: Sei $I : I \to \mathbb{R}$ konvex. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, so gilt für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in I$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

Aufgabe 2

- Was ändert sich in der Jensenschen Ungleichung, falls f eine konkave Funktion ist?
- Beweisen Sie, dass
$$\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\lambda_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$
für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Array der Länge n mit natürlichen Zahlen. Zum Finden des Maximums dieses Arrays soll der folgende Algorithmus verwendet werden:

Maximum(A):

```
1: max ← −∞
2: for i ← 1 to n do
3:    if A[i] > max then
4:       max ← A[i]
5:    end if
6: end for
```

Zeigen Sie, dass für die erwartete Anzahl T_4 der *Updates des maximalen Elementes*, $T_4 = \Theta(\log n)$ gilt.

Aufgabe 4

Angenommen wir setzten k Personen unabhängig voneinander an einen runden Tisch mit $n \geq k$ Stühlen. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Personen, die *keinen* direkten Tischnachbarn haben.