Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr/Dr. Sven Kosub
Stefan Eckhardt

Wintersemester 2004/05
Übungsblatt 9
17. Januar 2005

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 24.01.2005 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

A und B seien zwei sortierte Arrays mit jeweils n Schlüsseln. Zeigen Sie, wie Sie die Operation $\textsc{MedianOfAll}(A, B)$ implementieren würden, die den Median aller $2n$ Schlüssel zurückgibt. Die Laufzeit Ihrer Implementierung sollte $O(\log n)$ sein.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass im schlechtesten Fall mindestens $n + \lceil \log n \rceil - 2$ Vergleiche benötigt werden, um den größten und den zweitgrößten Schlüssel in einer Menge von n Schlüsseln zu finden.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie die folgende Aussage: „Sei x ein Knoten in einem Fibonacci-Heap mit k Kindern und seien $y_1, y_2, \ldots, y_k$ die Kinder von x in der Reihenfolge, in der diese zu Kindern von x wurden, wobei y_1 als erstes und y_k als letztes zum Kind von x wurde. Dann besitzt für $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ der Knoten y_i mindestens $i - 2$ Kinder.“

(b) Zeigen Sie, dass für die Fibonaccizahlen gilt $F_{n+2} = 1 + \sum_{i=0}^{n} F_i$ für alle $k \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen Knoten x in einem Fibonacci-Heap mit k Kindern gilt $\mathrm{size}(x) \geq F_{k+2}$, wobei $\mathrm{size}(x)$ die Anzahl der Kinder im Teilbaum mit der Wurzel x ist.

(d) Zeigen Sie, dass $F_{k+2} \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ für $k \geq 0$ gilt.

(e) Folgern Sie aus den Teilaufgaben (a) bis (d), dass für die Größe $D(n)$ in einem Fibonacci-Heap $D(n) = O(\log n)$ gilt.

Aufgabe 4

Die Operation $\textsc{Delete}(x)$ in einer Binomial-Queue wurde in der Vorlesung durch die Operationsfolge $\textsc{DecreaseKey}(x, -\infty)$, $\textsc{ExtractMin}$ realisiert. Zeigen Sie, wie Sie $\textsc{Delete}(x)$ direkt implementieren können. Ihre Implementierung sollte weiterhin $O(\log n)$ Zeit pro $\textsc{Delete}$-Operation benötigen.