
Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Wir betrachten von oben gesehen einen kreisförmigen Kuchen mit 24 cm Durchmesser. Innerhalb des Kuchens befindet sich ein kugelförmiger Kirschkern mit einem Durchmesser von 1cm. Wenn der Kuchen wie üblich in 12 gleich große keilförmige Teile geschnitten wird, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei nicht den Kirschkern treffen?

Beantworten Sie zunächst die Frage, wo der Mittelpunkt des Kirschkerns liegt, wenn der Kern die 12 Schnittgrenzen nicht schneidet.

Aufgabe 2

Wir wählen mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[k] = 2^{-(k+1)}$ eine ganze Zahl $k \geq 0$. Dann würfeln wir k mal und addieren die Ergebnisse der einzelnen Würfe. Welche Summe erwarten wir bei welcher Varianz?

Stellen Sie zunächst den Zusammenhang mit Aufgabe 3 von Blatt 5 her.

Aufgabe 3

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gewinnt. In jeder Runde setzt jeder von ihnen € 10 ein (der Gewinner erhält dann € 20). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter € 100 Gewinn gemacht hat, bevor er € 50 Verlust macht? Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf € 50 Verlust kommt?

Aufgabe 4

Gegeben ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Was ist die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

Aufgabe 5

Eine Dichte im \mathbb{R}^n ist eine nichtnegative integrierbare Funktion f auf \mathbb{R}^n mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

und

$$\Pr[a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n] = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion ist durch

$$F(x) = \Pr[\{y \in \mathbb{R}^n : y \leq x\}]$$

gegeben. Sei $F(x, y)$ eine auf \mathbb{R}^2 stetige Funktion, die in jeder Koordinate monoton wachsend ist und für die $F(0, 0) = 0$ sowie $F(1, 1) = 1$ gilt. Ferner sei F für gegebenes x nur an endlich vielen y nicht differenzierbar und umgekehrt. Zeigen Sie, dass es ein solches F gibt, das keine Verteilungsfunktion ist.