
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 23. Dezember 2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 1

- Schreiben Sie $\binom{n}{k}$ als Polynom in n .
 - Bestimmen Sie den Koeffizienten von t^3xy^4z in $(x + y + z + t)^9$.
 - Wieviele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe)
- Beweisen Sie die folgende Identität für Binomialkoeffizienten, indem Sie Wege auf einem $n \times m$ -Gitter ganzer Zahlen $\{(i, j); 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ mit $m \leq n$ betrachten, die von der linken unteren Ecke $(0, 0)$ über Gitterpunkte in die rechte obere Ecke (n, m) führen und stets aus Schritten nach rechts oder nach oben bestehen.

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{i}.$$

Zeigen Sie zum einen, dass es genau $\binom{m+n}{m}$ solche Wege gibt. Führen Sie andererseits eine alternative Berechnung durch, indem Sie die Anzahl der Wege bestimmen, die durch einen Punkt $x_i = (i, m - i)$ führen, wobei $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ sei, und dann alle Möglichkeiten, nach (n, m) zu kommen durch Aufsummierung der Wege über alle x_i erhalten. Begründen Sie Ihre Lösung.

- Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k}$ genau dann eine gerade Zahl ist, wenn $\binom{2n}{2k}$ eine gerade Zahl ist. Was bedeutet dies für die Anzahl von Zeilen im Pascalschen Dreieck, die nur aus ungeraden Zahlen bestehen?

Aufgabe 2

Wir betrachten die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Partitionen einer n -elementigen Menge in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen.

- Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$S_{0,0} = 1, \quad S_{n,n} = 1. \quad S_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad S_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0.$$

2. Wir setzen die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ als bekannt voraus. Stellen Sie die Rekursion bis $n + k = 8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks dar.
3. Zeigen Sie für alle $n \geq 1$: (a) $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ und (b) $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

Aufgabe 3

1. Wieviele verschiedene Ergebnisse ("Wurfkonstellationen") kann es geben, wenn man mit 8 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden beiden Szenarien:
 - (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.
 - (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.
 - (c) Fünf Würfel sind blau und drei Würfel sind grün.
2. Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ANTANANARIVO* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das *N* genau dreimal vorkommen.)
Benutzen Sie Maple für die Berechnungen!
3. 5 Studenten essen 10 Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 5 Studenten aufzuteilen.
 - (a) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind aber voneinander unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wieviele bekommt).
 - (b) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind nicht unterscheidbar, und jeder isst mindestens eine Tafel.
 - (c) Sie essen 10 unterscheidbare Tafeln und es soll jeder Student genau 2 Tafeln bekommen.
4. Die Quersumme der dekadischen Darstellung einer natürlichen Zahl ist die Summe der Ziffern der Darstellung zur Basis 10, z. B. hat 5404 die Quersumme 13. Wieviele Zahlen zwischen 0 und 9999 mit Quersumme 13 gibt es?

Aufgabe 4

Irreduzible Polynome über endlichen Körpern spielen in mannigfacher Weise eine bedeutende Rolle. Wir wollen uns mit interaktiver Hilfe von Maple einen Überblick verschaffen über die Menge aller irreduziblen Polynome über Z_2 höchstens vom Grad 5.

1. Versuchen Sie zunächst durch möglichst weitreichende hinreichende Bedingungen für die Reduzibilität der betreffenden Polynome die gesuchte Menge möglichst einzuschränken.
2. Für die verbleibende Menge von Polynomen entwerfe man einen systematischen Test auf Irreduzibilität. Führen Sie diesen Test mit Maple durch.
Welche Kardinalität besitzt die gesuchte Menge?

Hinweis: Machen Sie sich u. a. mit den Maple-Funktionen `Irreduc` und `Factor` vertraut in Zusammenhang mit den Varianten der Funktionen `mod` und `RootOf`.