

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

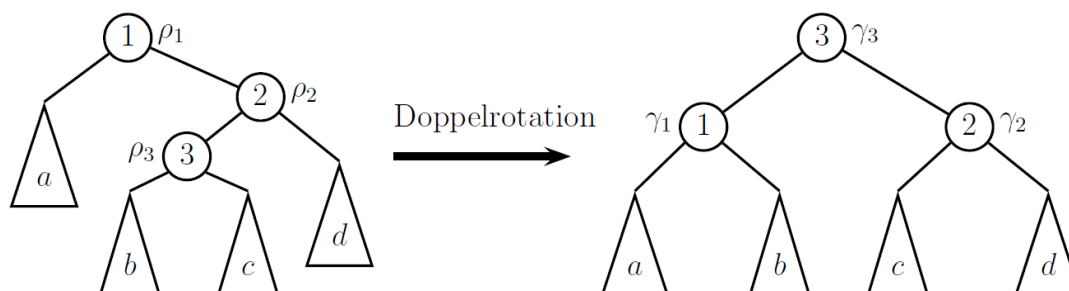
Abgabetermin: 11.11.2004 vor der Zentralübung

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

In gewichtsbalancierten Binärbäumen ist das Gewicht  $\rho(v)$  eines inneren Knotens  $v$  definiert als

$$\rho(v) = \frac{|T_l(v)|}{|T(v)|} = 1 - \frac{|T_r(v)|}{|T(v)|}.$$

Hierbei bezeichnen  $T(v)$  den Unterbaum mit Wurzel  $v$ ,  $T_l(v)$  bzw.  $T_r(v)$  den linken bzw. rechten Unterbaum von  $v$  und  $|T|$  die Anzahl der Blätter in einem Baum  $T$ . Nach einer Doppelrotation in einem Binärbaum können die neuen Gewichte  $\gamma_i$  aus den alten Gewichten  $\rho_i$  berechnet werden ( $i$  bezeichne hierbei den Knotenindex, siehe nachfolgende Abbildung).



Geben Sie einen formalen Beweis für die Richtigkeit der folgenden drei Gleichungen an:

1.  $\gamma_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + (1 - \rho_1)\rho_2\rho_3}$
2.  $\gamma_2 = \frac{\rho_2(1 - \rho_3)}{1 - \rho_2\rho_3}$
3.  $\gamma_3 = \rho_1 + (1 - \rho_1)\rho_2\rho_3$

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden rot-schwarz-Bäume als externe Suchbäume definiert, d.h. die gespeicherten Schlüssel sind nur in den Blättern abgelegt. Beschreiben Sie für diese Art der Realisierung die DELETE Operation.

*Hinweis:* Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.

### **Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Gegeben sei ein Baum mit  $n$  Knoten. Der „lowest common ancestor“ (LCA) zweier Knoten  $u$  und  $v$  ist definiert als der Knoten  $w$  mit der größten Tiefe, der sowohl Vorfahre von  $u$  als auch von  $v$  ist, d.h. kein Kind von  $w$  ist Vorfahre von  $u$  und von  $v$ .

Beschreiben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der den LCA für zwei beliebige Knoten berechnet. Wie ist die Laufzeit Ihres Algorithmus?

*Hinweis:* Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.

### **Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Ein AVL-Baum soll durch einen externen Suchbaum realisiert werden, d.h. die Schlüssel werden *nur* an den Blättern gespeichert. Geben Sie für diese Art der Realisierung die INSERT Operation an. Sollte der Schlüssel bereits im Baum gespeichert sein, so soll dieser nicht verändert werden.

*Hinweis:* Wird die Beschreibung mittels eines Programms in Pseudo-Code angegeben, ist dieses entsprechend zu kommentieren. Programme ohne Kommentar werden nicht akzeptiert.