
Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Abgabetermin: 27.01.2006 vor der Zentralübung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Boruvka(G)

- (1) $E(T) := \{\}$
- (2) **WHILE** $|V(G)| > 1$ **DO**
- (3) **FOR** $v \in V(G)$ **DO**
- (4) Sei $e = \{v, u\}$ die leichteste zu v adjazente Kante in $E(G)$
- (5) $E(T) := E(T) \cup \{\{v, u\}\}$
- (6) $G := Ge$
- (7) Entferne alle Schleifen in G .
- (8) **ENDFOR**
- (9) Für alle Paare von Knoten $u, v \in V(G)$ und Mengen E_{uv} von
- (10) Mehrfachkanten zwischen u und v setze $E(G) = E(G) \setminus E_{uv} \cup e$,
- (11) wobei $e = \{u, v\}$ und $w(e) = \min_{f \in E_{u,v}} w(f)$ gelten.
- (12) **ENDWHILE**
- (13) **RETURN** $T := (V, E(T))$

Zeigen Sie, dass der Algorithmus im schlechtesten Fall $\Omega(|E| \log |V|)$ Schritte benötigt, um den minimalen Spannbaum eines Graphen zu berechnen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage: Ein Graph $G = (V, E)$ hat einen eindeutigen MST T , d.h. $w(T) < w(T')$ für alle Spannbäume T' , falls für jeden Cut $C = (V_1, V_2)$ von V eine eindeutige gewichtsm minimale Kante $e \in E_C$ existiert, d.h. $w(e) < w(e')$ für alle $e' \in E_C$, wobei E_C die Menge der Kanten über den Schnitt ist. Zeigen Sie außerdem, dass das logische Gegenteil der Aussage falsch ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei T ein MST von G und $L = w_1, \dots, w_{n-1}$ die sortierte Liste der Kantengewichte von T . Zeigen sie, dass L für jeden anderen MST T' von G ebenfalls die sortierte Liste der Kantengewichte ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, T ein MST von G und $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge. Sei T' der Teilgraph von T , der durch die Menge V' induziert wird und G' der Teilgraph von G , der durch V' induziert wird. Zeigen Sie, dass T' ein MST von G' ist, falls T' zusammenhängend ist.