Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Sommersemester 2008
Übungsblatt 3
2. Mai 2008

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 9. Mai 2008 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c(e)$. Für zwei Knoten $u, v \in V$ bezeichne $f(u, v)$ das Gewicht eines minimalen u-v-Schnittes in G.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für beliebige Knoten $u, v, w_1, \ldots, w_r \in V$ gilt

$$f(u, v) \geq \min\{f(u, w_1), f(w_1, w_2), \ldots, f(w_r, v)\} .$$

(b) Ein gewichteter Baum $T = (V, F)$ heißt *flussäquivalent* zu $G = (V, E)$, wenn für alle Knotenpaare $u, v \in V$ der Wert eines minimalen u-v-Schnittes in G und T gleich ist.

Sei $K = (V, \binom{V}{2})$ der gewichtete, vollständige Graph, wobei die Kante $\{u, v\}$ das Gewicht $f(u, v)$ erhält. Dann ist ein Spannbaum von K mit maximalen Gewicht flussäquivalent zu G.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der einen maximalen Fluss in ungerichteten, gewichteten Graphen berechnet.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $l, u \colon A \to \mathbb{R}_0$ zwei Funktionen mit $0 \leq l(a) \leq u(a)$ für alle $a \in A$. Eine *Zirkulation* ist eine Abbildung $z \colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{(v,w) \in A} z(v, w) - \sum_{(w,v) \in A} z(w, v) = 0 \qquad \text{für alle } v \in V$$

und $l(a) \leq z(a) \leq u(a)$ für alle $a \in A$.

Zeigen Sie, dass es genau dann eine (zulässige) Zirkulation gibt, wenn es in dem Netzwerk $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{c}, s, t)$ einen s-t Fluss mit Wert $|f| = \sum_{a \in A} l(a)$ gibt. Hierbei sei

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= V \cup \{s, t\} \\
\tilde{A} &= A \cup \{(s, v), (v, t) \mid v \in V\} \\
\tilde{c}(v, w) &= \begin{cases} \sum_{(x,w) \in A} l(x, w) & \text{falls } v = s \\ \sum_{(v,x) \in A} l(v, x) & \text{falls } w = t \\ u(v, w) - l(v, w) & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Gastwirt benötigt an N aufeinander folgenden Tagen $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ Servietten. Er hat drei Optionen:

- Kaufe Servietten zum Stückpreis p.
- Reinige Servietten in der Schnellreinigung. Dauer m Tage, Stückpreis f.
- Reinige Servietten in der normalen Reinigung. Dauer n Tage, Stückpreis s.

Dabei ist $n > m$ und $s < f$. Jeden Morgen muss er entscheiden, wieviele Servietten er abends in die Schnellreinigung gibt, wieviele er in die normale Reinigung gibt, und wieviele er behält. Jeden Morgen bekommt er die frisch gewaschenen Servietten von der Reinigung und kauft gegebenenfalls neue.

(a) Formulieren Sie das Problem als ein Zirkulationsproblem. Erklären Sie die Bedeutung der Knoten und Kanten. Zeigen Sie insbesondere, dass es immer eine zulässige Zirkulation gibt.

(b) Geben Sie eine optimale Lösung für das Problem mit $N = 3$, $r = (3, 2, 4)$, $m = 1$ (das heißt, Servietten vom Vorabend sind zum nächsten Morgen gereinigt), $n = 2$, $p = 10$, $f = 6$ und $s = 3$ an.