Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Matthias Baumgart

Sommersemester 2008
Übungsblatt 6
23. Mai 2008

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 30.05.2008 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei ein Flussnetzwerk $N = (V, A, c, s, t)$. Wir erweitern das Netzwerk N, indem wir jedem Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ eine *Knotenkapazität* $cap(v)$ zuordnen. Für einen zulässigen Fluss soll für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ neben der Flusserhaltung auch gelten, dass die Summe der eingehenden bzw. ausgehenden Flüsse den Wert $cap(v)$ nicht überschreitet.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der maximale Flüsse in Flussnetzwerken mit Knotenkapazitäten (und Kantenkapazitäten) berechnet.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| > 2$ ohne isolierte Knoten. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Graph G ist zweifach knotenzusammenhängend.
2. Für je zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ und eine Kante e existiert ein einfacher Pfad von v_1 nach v_2, der e enthält.
3. Für je drei Knoten $v_1, v_2, v_3 \in V$ existiert ein einfacher Pfad von v_1 nach v_2, der durch v_3 geht.
4. Für je drei Knoten $v_1, v_2, v_3 \in V$ existiert ein einfacher Pfad von v_1 nach v_2, der nicht durch v_3 geht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Knoten $v \in V$ heißt *Artikulationsknoten*, wenn G durch Entfernung von v in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Offensichtlich ist G genau dann zweifach knotenzusammenhängend, wenn er keinen Artikulationsknoten enthält. Die *Zweifachzusammenhangskomponenten* (oder *Blöcke*) von G sind die maximalen Teilgraphen von G, die zweifach knotenzusammenhängend sind.

Geben Sie einen Algorithmus an, der die Blöcke und Artikulationsknoten von G in Zeit $O(|V| + |E|)$ berechnet.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine Kante in einem zusammenhängenden, ungerichteten Graphen heißt *Brücke*, wenn das Entfernen dieser Kante den Graphen in zwei Teile zerfallen lässt.

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph ohne Brücken. Wir bilden aus G einen gerichteten Graphen $G' = (V, A)$, indem wir jede Kante $\{u, v\} \in E$ *entweder* durch die gerichtete Kante (u, v) *oder* durch die gerichtete Kante (v, u) ersetzen.

Zeigen Sie, dass man die Kanten von G immer so durch gerichtete Kanten ersetzen kann, dass es in G' für jeden Knoten u zu jedem anderen Knoten v einen gerichteten Weg gibt.