
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 21. April 2008 vor der Vorlesung

Vorbemerkung: Hausaufgaben sollen grundsätzlich eine Lernkontrolle darstellen für den in vorausgegangenen Tutorstunden oder selbständig bereits durchgearbeiteten Stoff. Hausaufgaben haben insofern auch Wiederholungscharakter. Auf dem ersten Übungsblatt allerdings greifen die Hausaufgaben naturgemäß auf Stoff aus vorausgegangenen Semestern zurück. Vorbereitungsaufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung auf die Tutorstunden.

Grundlegende Definitionen: Wir betrachten Mengen von Wörtern (Zeichenketten, endliche Folgen von Buchstaben) über einer Grundmenge Σ , dem sog. Alphabet. Dabei bezeichnet ϵ das leere Wort und wir schreiben die Verkettung zweier Wörter v und w auch als Hintereinanderschreibung vw . Bei Verkettung von Wörtern addiert sich die Länge der Wörter. a^n bezeichnet das Wort bestehend aus $n \in \mathbb{N}$ Mal dem gleichen Buchstaben a , wobei $a^0 = \epsilon$ gesetzt wird und \mathbb{N} die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen bedeutet. In der üblichen Mengentheoretischen Schreibweise gilt

$$\begin{aligned} AB &= \{xy \mid x \in A \text{ und } y \in B\}, \\ A^0 &= \{\epsilon\}, \\ A^{n+1} &= AA^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ A^* &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n, \\ A^+ &= A^* \setminus \{\epsilon\}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens 3 Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Mengen liegen.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^2 : w = uu\}$.
2. $L_2 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w^2 = w^3\}$.
4. $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^2 : w^3 = u^2\}$.
5. $L_5 = \{(ab)^m (ba)^n \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n > m\}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Es bezeichne \circ die Konkatenation von Wörtern.

1. Zeigen Sie, dass die Algebra $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ ein Monoid ist.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der für ein Wort $w \in \Sigma^+$ entscheidet, ob w durch einfache oder wiederholte Konkatenation von Wörtern der Menge $X = \{aaa, bb\}$ darstellbar ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

In der Informatik werden Mengen von Wörtern meist als formale Sprachen bezeichnet. Gewöhnen Sie sich frühzeitig an diesen Sprachgebrauch. Dementsprechend bezeichnen wir im Folgenden mit A, B, C, D (formale) Sprachen über einem Alphabet Σ , was also nichts anderes als $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ bedeutet. Im Folgenden bezeichnen wir die Wortlänge eines Wortes $w \in \Sigma^*$ mit $|w|$.

1. Zeigen Sie per Induktion über die Länge $n = |w|$ von Wörtern w für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A \subseteq B \implies A^n \subseteq B^n.$$

2. Zeigen Sie nun die Monotonie der Sternoperation, d. h.

$$A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie endlich ist oder wenn eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert.

Sei Σ eine endliche, nicht leere Menge von Zeichen und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ .

Zeigen Sie, dass Σ^* abzählbar ist.

Hinweis: Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.

Vorbereitung 1

Man zeige oder widerlege:

$$(A^*)^* = A^*, \quad (A^*B^*)^* = (A \cup B)^*, \quad (\Sigma \setminus A)^* = \Sigma^* \setminus A^*.$$

Vorbereitung 2

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ besitzt eine Übergangsfunktion δ mit Definitionsbereich $Q \times \Sigma$, wobei Q die Menge der Zustände und Σ das sogenannte Eingabealphabet bezeichnen. Zustände, für die es nicht möglich ist, durch Eingabe von Zeichenfolgen einen Endzustand zu erreichen, kann man zur Vereinfachung entfernen. Man muß dann allerdings zulassen, dass δ nur auf einer Teilmenge von $Q \times \Sigma$ (partiell) definiert ist.

1. Gegeben sei ein DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Sei $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Definieren Sie einen Automaten $A' = (Q', \Sigma', \delta', q_0, F)$ mit partiell definierter Übergangsfunktion δ' , der die gleichen Wörter akzeptiert wie A .
2. Sei $A' = (Q', \Sigma', \delta', q_0, F)$ ein endlicher Automat mit partiell definierter Übergangsfunktion δ' im dem genannten Sinn.

Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion eines DFA A an, der die gleichen Wörter akzeptiert wie A' .

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und mit 1 enden oder mit 0 beginnen und mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert.
2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.

Tutoraufgabe 2

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer Anzahl n von Zuständen. Zeigen Sie:

1. Sei $w = w_1w_2 \dots w_{2n} \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge $2n$ und sei q_0, q_1, \dots, q_{2n} die Folge der Zustände, die M ausgehend von q_0 bei Eingabe von w annimmt. Dann gibt es k, l mit $k < l$, so dass $q_k = q_l$.
2. Falls es ein Wort w der Länge $2n$ gibt mit $w \in L(M)$, dann gibt es unendlich viele Wörter, die der Automat M akzeptiert.