Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Werner Meixner, Alexander Krauss

Sommersemester 2008
Übungsblatt 2
21. April 2008

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 28. April 2008 **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

1. Seien $A = \{a, aa\}$ und $B = \{ab, b\}$. Zeigen Sie $|A^2| = 3$ und $|AB| = 3$.
2. Man zeige oder widerlege:

$$\{\epsilon\}A = \emptyset A\,, \qquad A(B \cap C) = AB \cap AC\,, \qquad A^*A^* = A^*\,.$$

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (als Graph und Übergangsrelation) an, der über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die folgende Sprache akzeptiert.

1. Die Menge aller Wörter, die das Teilwort 1000 enthalten.
2. Die Menge aller Wörter, bei denen die Anzahl der Einsen durch 4 teilbar ist.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Informieren Sie sich (z.B. auf Wikipedia) über das UTF-8 Verfahren, welches zur Zeichenkodierung von Unicode-Zeichen verwendet wird.
Sei $\Sigma = \{0, 1\}^8 = \{00000000, 00000001, 00000010, \ldots, 11111111\}$ die Menge der 8-Bit-Worte (Bytes). Geben Sie einen DFA an, der ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn es einen gültigen UTF8-Text repräsentiert.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ für DFAs linksrekursiv definiert:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q \tag{1}$$
$$\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(\delta(q, a), x) \tag{2}$$

Manchmal möchte man aber die Rekursion auch "von rechts" aufklappen:

$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \tag{3}$$

1. Zeigen Sie per Induktion, dass (3) aus der linksrekursiven Definition folgt.
2. Zeigen Sie: $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$ mit $x, y \in \Sigma^*$.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$.

Geben Sie einen NFA an, der die Sprache der Wörter akzeptiert, die (mindestens) eines der folgenden Wörter als Teilwort enthalten: `klein`, `eis`, `keiner`, `zwei`.

Machen Sie sinnvollen Gebrauch von Nichtdeterminismus, so dass Ihre Konstruktion möglichst einfach ist, und sich leicht auf andere Suchwörter verallgemeinern lässt.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Wir bezeichnen den vom Wortende her gezählten k-ten Buchstaben eines Wortes w als k-letztes Zeichen von w. Sei $L_k \subseteq \Sigma^*$ $(k > 0)$ mit

$$L_k = \{w \mid k \leq |w| \text{ und das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } 1\}\,.$$

In der Vorlesung wurde ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit $k+1$ Zuständen konstruiert, der L_k akzeptiert. Sei A_k dieser Automat.

1. Konstruieren Sie zu A_4 einen deterministischen endlichen Automaten A', so dass gilt $L(A') = L_4$.

2. Wieviele Zustände besitzt der von Ihnen konstruierte Automat A'?

Vorbereitung 2

Wir betrachten einen nichtdeterministischen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_4\})$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, dessen Zustandsübergangsrelation δ wie folgt gegeben ist:

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$
q_0	$\{q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
q_1	$\{q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_2	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2, q_4\}$
q_3	$\{q_3, q_4\}$	$\{q_3, q_4\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$

Wenden Sie die Potenzmengenkonstruktion auf A an, um einen deterministischen Automaten A' mit $L(A') = L(A)$ zu erhalten.
Welchen DFA zur gleichen Sprache $L(A')$ gibt es, der weniger Zustände hat als A'?

Vorbereitung 3

Stellen Sie die folgenden Sprachen jeweils durch einen regulären Ausdruck dar.

1. Die Sprache aller Wörter über $\{0,1\}$, die mit 01 beginnen und mit 10 enden.

2. Die Sprache aller Wörter über $\{0,1\}$, in denen kein Paar aufeinanderfolgender Nullen weiter rechts steht als ein beliebiges Paar von benachbarten Einsen.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten den regulären Ausdruck $R = (1(0|1)^*)|0$.

1. Konstruieren Sie für R mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung einen entsprechenden nichtdeterministischen Automaten A mit ϵ-Übergängen, so dass $L(R) = L(A)$ gilt.

2. Wandeln Sie den erhaltenen Automaten in einen äquivalenten NFA ohne ϵ-Übergänge um.

3. Benutzen Sie die Ergebnisse der Vorbereitungsaufgabe 2 um einen deterministischen Automaten A' zu gewinnen, dessen Sprache gleich $L(R)$ ist.

Tutoraufgabe 2

Das sogenannte *Shuffle-Produkt* spielt in der Theorie der nebenläufigen Systeme eine wichtige Rolle. Für zwei Sprachen L_1 und L_2 bezeichnet $L_1 \| L_2$ die Menge der Wörter, die man erhält indem man zwei Wörter $v \in L_1$ und $w \in L_2$ miteinander verschränkt. Dabei können sich Fragmente aus v und w beliebig abwechseln, wobei die Reihenfolge der Zeichen aus v und w jedoch erhalten bleibt. Formal definieren wir $L_1 \| L_2$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
L_1 \| L_2 = \{v_1 w_1 v_2 w_2 \dots v_n w_n \mid\ & v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*, \\
& v_1 v_2 \dots v_n \in L_1 \text{ und } w_1 w_2 \dots w_n \in L_2\}
\end{aligned}
$$

Man kann das Shuffle-Produkt als Parallelkomposition von zwei unabhängigen Abläufen betrachten.

1. Versuchen Sie, eine einfache Beschreibung von $L((01)^*) \| L((10)^*)$ zu finden.

2. Zeigen Sie: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \| L_2$ regulär. *Hinweis: Konstruieren Sie einen NFA für $L_1 \| L_2$.*

3. Führen Sie die Konstruktion konkret für die Sprachen $L((01)^*)$ und $L((10)^*)$ durch und geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^i cd^{2i} e \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.