Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dmytro Chibisov
Dr. Stefan Schmid

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 4
6. November 2008

Algorithmen und Datenstrukturen (EI)

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$

Aufgabe 2

1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$ existiert.
2. Sei $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, p, q > 0\}$ die Menge der positiven Brüche. Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}_0$ existiert. (Hinweis: die Zahl $\frac{p}{q}$ kann man sich als ein Element einer unendlich grossen Matrix auffassen, und zwar in der Spalte p der Reihe q. In dem Fall reduziert sich die Aufgabe, eine bijektive Abbildung zu finden, auf die Enumerierung aller Elemente dieser Matrix)

Aufgabe 3

In dieser Aufgaben wollen wir einen endlichen Automaten konstruieren, der *Substrings* eines Inputstrings erkennt. Ein Substring einer Zeichenfolge $z = z_1 z_2 z_3 ... z_k$ ist eine konsekutive Folge $z_i z_{i+1} ... z_j$ von Zeichen aus z, für beliebige $1 \leq i \leq j \leq k$. Zum Beispiel hat der String aac die Substrings $\{\emptyset, a, aa, aac, ac, c\}$.

Unser Inputstring besteht aus Symbolen $\{a, b\}$, die nacheinander vom Automaten eingelesen werden. Der Automat sollte Substrings der Form bab^* erkennen. Dabei bedeutet b^* eine Folge von 0 oder mehr b's, also: $b^* = \emptyset, b, bb, bbb, bbbb, bbbbb, ...$ Der Automat soll also in einen akzeptierenden Zustand gehen wann immer die zuletzt gelesenen Symbole von der Form bab^* sind. Zum Beispiel, für einen Inputstream $b\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{b}\ \underline{b}\ \underline{a}\ a\ a\ a\ b\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{a}\ a$ soll der Automat bei Empfang der unterstrichenen Symbole im akzeptierenden Zustand sein. Konstruieren Sie einen solchen Automaten!

Aufgabe 4

Wir betrachten nun noch eine andere Art von Automaten. Als Input bekommt der Automat eine Zahl im Zweiersystem. Dabei liest der Automat die Zahl von links nach rechts, also zuerst das most significant bit, dann das zweitgrösste Bit, und so weiter. Zum Beispiel für die Zahl $11 = (1011)_2$ liest der Automat: $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1$.

1. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der feststellt, ob eine eingelesene Zahl durch 2 teilbar ist!

2. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der feststellt, ob eine eingelesene Zahl durch 3 teilbar ist!