
Diskrete Strukturen

Arbeitsblatt 1 (zu Übungsblatt 4)

Hinweis: Die Lösungen der Vorbereitungsaufgaben von Blatt 4 werden nachfolgend als Arbeitsblatt zur Verfügung gestellt. Es ist unbedingt notwendig, dass dieses Arbeitsblatt vor der Teilnahme an den Tutorübungen intensiv durchgearbeitet wird.

Vorbereitung 1

Mengen wollen wir dann „gleich groß“ nennen, wenn sich deren Elemente mit einer gewissen Vorschrift paarweise bijektiv zuordnen lassen. Wir übernehmen auch die plausible Vorstellung, dass eine Teilmenge B einer Menge A nicht „größer“ ist als A . Außerdem sei eine Teilmenge B von A genau dann „kleiner“ als A , wenn B und A nicht „gleich groß“ sind.

1. Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{N} und die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen „gleich groß“ sind, indem Sie eine Vorschrift angeben, wie man alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nacheinander durchlaufen kann!
2. Warum läßt sich behaupten, dass die Menge \mathbb{Q} nicht „größer“ sein kann als \mathbb{N} ?

Lösungsvorschlag

1. Zur Entwicklung der Vorschrift nehmen wir eine geometrische Vorstellung der Zahlenpaare (m, n) von natürlichen Zahlen zu Hilfe und fassen (m, n) als Punkte in einem x, y -Koordinatensystem auf. Manchmal werden solche Punkte auch als Gitterpunkte bezeichnet.

Es ist angebracht, sich einen „Durchlauf“ besser als Nummerierung aller Gitterpunkte vorzustellen.

Dem Zahlenpaar bzw. dem Punkt $(1, 1)$ geben wir die Nummer 1.

Als nächstes zählen wir die Punkte $(1, 2)$ und $(2, 1)$, egal in welcher Reihenfolge. Geben wir z. B. dem Paar $(1, 2)$ die Nummer 2 und $(2, 1)$ die Nummer 3.

Die beiden zuletzt gezählten Paare (m, n) liegen offenbar auf der Geraden $m + n = 3$.

Als nächstes zählen wir die Paare (m, n) , die auf der Geraden $m + n = 4$ liegen.

Und die allgemeine Vorschrift lautet, für alle $k = 2, 3, \dots$ nacheinander alle Punkte der Geraden $m + n = k$ zu nummerieren. Innerhalb der Geraden könnte man z. B. die Punkte nach aufsteigender x -Komponente nummerieren.

Bemerkung: Das hier beschriebene Nummerierungsverfahren nennt man auch das erste Cantor'sche Diagonalverfahren.

2. Wir bezeichnen die Menge der positiven rationalen Zahlen bzw. negativen rationalen Zahlen mit \mathbb{Q}^+ bzw. \mathbb{Q}^- . Dann gilt $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$.

Die Menge der Paare (m, n) natürlicher Zahlen reicht aus, um alle Elemente aus \mathbb{Q} zu kodieren. Man nehme z. B. vollständig gekürzte Brüche für die positiven rationalen Zahlen. Für negative rationale Zahlen kann man Paare (a, b) nehmen mit $ggT(a, b) = 2$. Und die 0 könnten wir durch $(3, 3)$ darstellen. Damit läßt sich \mathbb{Q} bijektiv einer Teilmenge P von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zuordnen.

Wir schließen, dass \mathbb{Q} „gleich groß“ ist wie P , i. Z. $|\mathbb{Q}| = |P|$ und P ist „nicht größer“ als $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, i. Z. $|P| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Wir wissen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ „gleich groß“ ist wie \mathbb{N} , i. Z. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Im Ergebnis schließen wir $|\mathbb{Q}| = |P| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, d. h. \mathbb{Q} ist „nicht größer“ als P .

Bemerkung: Genau genommen haben wir im letzten Schritt die Definition von „nicht größer“ wie folgt erweitert: $A \leq B$ genau dann, wenn A ist „gleich groß“ wie eine Teilmenge A' von B .

Vorbereitung 2

Begründen Sie die folgende Implikation, die für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik gilt. Seien \mathcal{A} eine beliebige, endliche Menge von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Dann gilt

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}, G \vdash F.$$

Lösungsvorschlag

Man muss verstehen, was die obige Implikation bedeutet. Diese Implikation setzt sich aus den Aussagen $\mathcal{A} \vdash F$ als Prämisse und der Aussage $\mathcal{A}, G \vdash F$ als Konklusion zusammen. Was aber bedeuten diese Teilaussagen?

Dazu gehen wir zu Folie 74 des Foliensatzes 04-Grundlagen-Logik (Kapitel II-Grundlagen; Logik: Ein Kalkül für logische Inferenzen) der Vorlesung. Eine Inferenz ist dort ein Ausdruck der Form $\mathcal{A} \vdash F$. Man kann ihn als Relation zwischen endlichen Mengen \mathcal{A} von Formeln und einer Formel F deuten. Mithilfe von Inferenzregeln (Herleitungskalkül) können solche Ausdrücke erzeugt werden. Erzeugte Ausdrücke heißen dann herleitbare Inferenzen. Nun verstehen wir die Implikation wie folgt:

Falls $\mathcal{A} \vdash F$ herleitbar ist, dann ist auch $\mathcal{A}, G \vdash F$ herleitbar.

Folie 84 desselben Foliensatzes definiert genauer, was eine Herleitung von $\mathcal{A} \vdash F$ ist. Wir werden uns darauf im Folgenden beziehen.

Wir nehmen also an, dass $\mathcal{A} \vdash F$ herleitbar ist und insbesondere, dass $\mathcal{A}_1 \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \vdash F_2, \dots, \mathcal{A}_n \vdash F_n$, eine endliche Sequenz von Inferenzen ist mit den Eigenschaften

- $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ und $F_n = F$.
- Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ kann der Ausdruck $\mathcal{A}_i \vdash F_i$ aus einer Teilmenge der Inferenzen $\mathcal{A}_1 \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \vdash F_2, \dots, \mathcal{A}_{i-1} \vdash F_{i-1}$ durch Anwendung einer Regel des Herleitungskalküls gewonnen werden.

Zur Erinnerung: Es gibt 1. die Annahmeregeln, 2. Regel für true, 3. Regel für false, 4. Konjunktionseinführung, 5. Konjunktionsbeseitigung, 6. Disjunktionseinführung, 7. Disjunktionsbeseitigung, 8. Negationseinführung, 9. Negationsbeseitigung, 10. Implikations-einführung, 11. Implikationsbeseitigung.

Alle diese Regeln gelten für beliebige Annahmемengen \mathcal{A} . Es können also die Annahmемengen stets durch eine beliebige Formel G vergrößert werden, ohne die Anwendbarkeit der Regel zu verletzen.

Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_1 \cup \{G\} \vdash F_1, \mathcal{A}_2 \cup \{G\} \vdash F_2, \dots, \mathcal{A}_n \cup \{G\} \vdash F_n$ eine Herleitung von $\mathcal{A} \cup \{G\} \vdash F$ ist.

Vorbereitung 3

Seien a, b, c bzw. x, y, z bzw. P, Q Konstanten bzw. Variablen bzw. 2-stellige Prädikate aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Gegeben sei die Struktur $S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x (P(x, y) \Rightarrow (\exists y Q(x, y))).$$

1. Geben Sie für jedes Vorkommen einer Variablen in F seinen Gültigkeitsbereich an.
2. Entscheiden Sie, welche Vorkommen frei bzw. gebunden sind. Ist F eine geschlossene Formel?
3. Begründen Sie, warum die Struktur S nicht zur Formel F passt!
4. Geben Sie eine möglichst minimale Erweiterung S' der Struktur S an, so dass S' zu F passt und F wahr macht, d. h. $[F](S') = 1$.

Lösungsvorschlag

1. Die Beantwortung der Frage nach dem Gültigkeitsbereich von Variablenvorkommen in einer Zeichenreihe, d. h. hier eines Ausdrucks, setzt die Strukturanalyse der Zeichenreihe im Kalkül der prädikatenlogischen Ausdrücke voraus. Die Struktur einer Formel wird durch die Anwendung von Operatoren auf Formeln definiert. Die (mit Variablen spezifizierten) Quantoren $\forall x$ und $\exists y$ sind dabei unäre Operatoren, wie \neg einer ist. Man muss zu allen Operatorvorkommen die zugehörigen Teilausdrücke bestimmen, auf die der Operator an dieser Stelle angewandt wird.

F geht durch Anwendung des (durch x spezifizierten) Quantors $\forall x$ am Anfang von F hervor, und die zugehörige Teilformel von F , auf die er angewandt wird, ist $F_1 = (P(x, y) \Rightarrow (\exists y Q(x, y)))$. Wir haben also

$$F = \forall x F_1.$$

F_1 ist ein aussagenlogischer Ausdruck, und zwar eine Implikation

$$F_1 = F_2 \Rightarrow F_3.$$

mit Prämisse

$$F_2 = P(x, y)$$

und Konklusion

$$F_3 = \exists y F_4,$$

wobei

$$F_4 = Q(x, y).$$

Wir sehen, dass der Ausdruck F durch 3 Operatoranwendungen definiert wird. Man beachte, dass die Bezeichnungen F_i gewisse Abschnitte von F bezeichnen und nicht einfach nur Ausdrücke.

Die Zeichenreihe F enthält an 3 Stellen das Zeichen x .

Das erste Vorkommen von x steht unmittelbar hinter einem Quantor und spezifiziert lediglich die entsprechende Quantifizierung. Solchen Vorkommen haben wir keinen Gültigkeitsbereich zugeordnet. Natürlich könnte man diesem Vorkommen die Formel als Gültigkeitsbereich zuordnen, auf die der spezifizierte Quantor angewandt wird, in diesem Fall also F_1 .

Das zweite Vorkommen von x ist in dem prädikativen (atomaren) Ausdruck F_2 platziert. Die kleinste Unterformel von F der Gestalt $\forall x G$, welches das zweite Vorkommen von x enthält, ist $\forall x F_1$. Also ist der Teilausdruck F_1 von F der Gültigkeitsbereich des zweiten Vorkommens von x .

Das dritte Vorkommen von x ist in dem prädikativen Ausdruck F_4 zu finden. Die kleinste Unterformel von F der Gestalt $\forall x G$, welches das dritte Vorkommen von x enthält, ist wieder $\forall x F_1$. Also ist der Teilausdruck F_1 von F der Gültigkeitsbereich des dritten Vorkommens von x .

Man kann leicht nachvollziehen, dass der Gültigkeitsbereich eines Vorkommens einer Variablen x dadurch gefunden werden kann, dass man von der Stelle dieses Vorkommens aus nach links bis zum ersten durch x spezifizierten Quantorenvorkommen geht. Die Teilformel, auf die dieses Quantorenvorkommen angewandt wird, ist dann der gesuchte Gültigkeitsbereich.

Nun betrachten wir die Vorkommen der Variablen y .

Der Gültigkeitsbereich des ersten Vorkommens von y ist F selbst, weil sich links von diesem Vorkommen aus kein mit y spezifizierter Quantor befindet.

Dem zweiten Vorkommen von y ist als Quantorenspezifikation kein Gültigkeitsbereich zugeordnet.

Der Gültigkeitsbereich des dritten Vorkommens von y ist F_4 , weil $\exists y F_4$ offenbar die kleinste Unterformel von F ist, die das betreffende Vorkommen enthält.

2. Ein Vorkommen einer Variablen ist dann frei in einer Formel F , wenn der Gültigkeitsbereich des Vorkommens gleich F ist.

Aus der vorausgehenden Teilaufgabe entnimmt man, dass es in F nur ein einziges freies Vorkommen einer Variablen gibt, und dies ist das erste Vorkommen von y . Alle anderen Variablenvorkommen sind gebunden.

Da es in F ein freies Vorkommen einer Variablen gibt, ist F keine geschlossene Formel.

3. Die Struktur enthält keine Interpretation des Prädikats Q . Also passt S nicht zu F .
4. Wir interpretieren Q z. B. als die leere Relation, d. h. $Q_S = \emptyset$. Die Struktur S wird zur Struktur S' erweitert durch die Definition $I(Q) = Q_S$. Wir rechnen

$$[F](S') = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in U_{S'} \text{ gilt } [F_1](S'_{x:=d}) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir müssen hier sehen, dass die Gleichung $[F](S') = 1$ eine Aussage ist, die zu der Aussage $A = \text{„für alle } d \in U_{S'} \text{ gilt } [F_1](S'_{x:=d}) = 1\text{“}$ äquivalent ist.

Wegen $F_1 = F_2 \Rightarrow F_3$ rechnen wir für beliebiges $d \in U_{S'}$ weiter wie folgt.

$$[F_1](S'_{x:=d}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [F_2](S'_{x:=d}) = 1 \text{ impliziert } [F_3](S'_{x:=d}) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gleichung $[F_1](S'_{x:=d}) = 1$ ist eine Aussage, die äquivalent ist zu der Implikation „ B impliziert C “ mit den Aussagen $B = \text{„}[F_2](S'_{x:=d}) = 1\text{“}$ und $C = \text{„}[F_3](S'_{x:=d}) = 1\text{“}$.

Nun ist aber die Aussage $B = \text{„}[F_2](S'_{x:=d}) = 1\text{“}$ äquivalent mit der Aussage $[P(x, y)](S'_{x:=d}) = 1$, d. h. $(d, 1) \in P_S$.

$$\begin{aligned} [F_2](S'_{x:=d}) &= [P(x, y)](S'_{x:=d}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } (d, 1) \in P_S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus $(d, 1) \in P_S$ folgt nach Definition von P_S ein Widerspruch, weil alle Paare aus P_S in der zweiten Komponente eine 3 haben. Also gilt für alle d die Aussage B nicht.

Daraus folgt, dass für alle $d \in U_S$ die Implikation „ B impliziert C “ stets wahr ist. Mithin ist die Aussage A wahr, und demzufolge gilt

$$[F](S') = 1.$$

Vorbereitung 4

Wir verändern die Formel F aus der vorausgegangenen Aufgabe wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen.

$$G = \forall x (P(x, a) \Rightarrow (\exists y P(x, y))).$$

1. Berechnen Sie $[G](S)$! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!

Lösungsvorschlag

1. Wir bemerken zunächst, dass die Struktur S zur Formel G passt, denn für alle Bezeichner ist die Bedeutung definiert.

Wir führen Bezeichnungen für Teilausdrücke von G ein und rechnen analog zur vorausgehenden Teilaufgabe: $G = \forall x G_1$, $G_1 = G_2 \Rightarrow G_3$, $G_2 = P(x, a)$ und $G_3 = \exists y P(x, y)$.

$$[G](S) = \begin{cases} 1 & : \text{ falls für alle } d \in U_S \text{ gilt } [G_1](S_{x:=d}) = 1, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen $G_1 = G_2 \Rightarrow G_3$ rechnen wir für beliebiges $d \in U_S$ weiter wie folgt.

$$\begin{aligned} [G_1](S_{x:=d}) &= \begin{cases} 1 & : \text{ falls } [G_2](S_{x:=d}) = 1 \text{ impliziert } [G_3](S_{x:=d}) = 1, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & : \text{ falls } (d, a_S) \in P_S \text{ impliziert } [G_3](S_{x:=d}) = 1, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen $(d, a_S) = (d, 2) \notin P_S$ ist die enthaltene Implikation für alle d wahr und deshalb gilt

$$[G](S) = 1.$$

Daraus ergibt sich die Erfüllbarkeit von F , denn man braucht für S' lediglich $I(Q) = P_S$ zu setzen.

2. G ist eine geschlossene Formel mit Wahrheitswert 1. Daraus folgt, dass G eine Tautologie ist.