Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Lösungsblatt 7-Arbeitsblatt
28. Januar 2009

Diskrete Strukturen

Arbeitsblatt 2
(zu Übungsblatt 7)

Hinweis: *Die Lösungen der Vorbereitungsaufgaben von Blatt 13 werden nachfolgend als Arbeitsblatt zur Verfügung gestellt. Es ist unbedingt notwendig, dass dieses Arbeitsblatt vor der Teilnahme an den Tutorübungen intensiv durchgearbeitet wird.*

Vorbereitung 1

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?
2. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?
3. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A. Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}$ an und begründen Sie diese Formel.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösungsvorschlag

1. Die Anzahl $\mathrm{anz}_{Rel}(M)$ der Relationen über M ist gleich der Anzahl der Teilmengen von $M \times M$. Wegen $|M \times M| = m^2$ gilt
$$\mathrm{anz}_{Rel}(M) = |\mathcal{P}(M \times M)| = 2^{m^2}\,.$$
2. Zur Konstruktion einer reflexiven Relationen über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M, nimmt eine Teilmenge der Restmenge und fügt anschließend alle Paare der Identität hinzu. Entsprechend erhält man die Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.
$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}\left((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M\right)| = 2^{m^2-m}\,.$$
3. Sei $B \subseteq A$. Seien $A' := A \setminus B$ und $[B, A] := \{C \subseteq A \mid B \subseteq C \subseteq A\}$. Dann ist $f : [B, A] \to \mathcal{P}(A')$ mit $f(C) = C \setminus B$ eine bijektive Abbildung von $[B, A]$ auf $\mathcal{P}(A')$. Es gilt wegen $|A'| = n - m$
$$|\mathcal{P}(A')| = 2^{n-m}\,.$$
Für $n = 5$ und $m = 2$ ergibt sich $|\mathcal{P}(A')| = 2^3 = 8$.

Vorbereitung 2

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!
2. Wie viele Partitionen gibt es über M?
3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?
4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?
5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?
6. Geben Sie alle Permutationen von M an!

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösungsvorschlag

1. Äquivalenzrelationen sind durch die Menge ihrer zugeordneten Äquivalenzklassen bestimmt. Über der Grundmenge M mit 3 Elementen gibt es Äquivalenzrelationen mit 3 Klassen, mit 2 Klassen und mit einer einzigen Klassen. Die Menge der zugeordneten Klassen bilden eine Partition P der Grundmenge M.

   Äquivalenzrelationen mit
1 Klasse: $P_{1,1} = \{\{0, 1, 2\}\}$.

   Äquivalenzrelationen mit
2 Klassen: $P_{2,1} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$.
$P_{2,2} = \{\{1\}, \{0, 2\}\}$.
$P_{2,3} = \{\{2\}, \{1, 0\}\}$.

   Äquivalenzrelationen mit
3 Klassen: $P_{3,1} = \{\{1\}, \{2\}, \{0\}\}$.

2. Die Partitionen entsprechen eineindeutig den Äquivalenzrelationen. Also gibt es 5 Partitionen über M.

3. $\mathbb{R} = \emptyset$ ist eine Äquivalenzrelation über M, falls $M = \emptyset$. Aus $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ folgt, dass $\emptyset$ die einzige Relation über $\emptyset$ ist.

4. Damit f surjektiv ist, muss $\{k_1, k_2\}$ mit $k_1 := f^{-1}(1)$ und $k_2 := f^{-1}(2)$ eine 2-elementige Partition über M bilden. Also kommen nur die Partitionen $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ und $P_{2,3}$ für $\{k_1, k_2\}$ in Frage. Für die Zuordnung der Urbildklassen k_1, k_2 zu den Klassen der Partitionen $P_{i,j}$ gibt es nun stets 2 Möglichkeiten. Deshalb erhalten wir insgesamt 6 surjektive Abbildungen.

5. Eine injektive Operation über einer endlichen Menge M ist gleichzeitig surjektiv und damit bijektiv. Für die Abbildung von 0 gibt es 3 Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es dann 2 Möglichkeiten der Abbildung des Elementes 1. Damit erhalten wir $2 \cdot 3 = 6$ injektive Operationen über M.

6. Eine Permutation einer Menge A wurde als Variation der Länge $|A|$ von Elementen von A definiert. Eine Permutation ist demnach auch eine Sequenz $q_1, q_2, \ldots, q_m$ mit $m = |A|$ paarweise verschiedenen Elementen p_i aus A.

Wir ordnen jeder Permutation $q_1, q_2, \ldots, q_m$ über einer endlichen Menge A in eineindeutiger Weise eine bijektive Abbildung $p : [1, m] \to A$ wie folgt zu

$$p(i) = q_i \,.$$

Man beachte, dass die folgende Tabelle für die 6 Permutationen $p_1, \ldots, p_6$ sowohl zeilenweise als Liste von Sequenzen, als auch spaltenweise als Liste von Funktionswerten für die Argumente, beispielweise, $1, 2, 3$ gelesen werden können.

	1	2	3
p_1	0	1	2
p_2	0	2	1
p_3	1	0	2
p_4	1	2	0
p_5	2	0	1
p_6	2	1	0

Vorbereitung 3

Wie viele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe`)

Lösungsvorschlag

Für den ersten Zug gibt es 9 Möglichkeiten, für den zweiten 8, usw. . Für die Endstellung ist es aber nicht von Bedeutung, ob der Spieler A bzw. B ein bestimmtes Feld mit seinem ersten oder seinem zweiten Zug belegt hat. Die Anzahl der möglichen Stellungen ist also

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 756 \,.$$

Vorbereitung 4

Seien A und B beliebige Mengen und $\mathcal{P}(A)$ bzw. $\mathcal{P}(B)$ die entsprechenden Potenzmengen.

1. Man zeige $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Geben Sie ein Beipiel für A und B an, so dass $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subseteq A \cap B \\ &\iff X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \,. \end{aligned}$$

2. Seien $A = \{a\}, B = \{b\}$.
   Dann gilt $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
   Andererseits gilt $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ und $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{b\}\}$.
   Es gilt $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

   Daraus folgt $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, aber auch $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, mithin das, was zu beweisen war.