Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Prof. Dr. Javier Esparza

Wintersemester 2008/09
Abschlussklausur
7. Februar 2009

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 150 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ	Korrektor
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Wenn wahr, begründen Sie Ihre Antwort. Wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel an!

1. Die Menge $\{\vee, \wedge\}$ von Operatoren ist vollständig für die Aussagenlogik.
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$.
3. Jeder vollständige Graph K_n hat eine Eulertour.
4. Es gibt einen zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = |E| + 2$.
5. Sei $G = \langle S, \circ \rangle$ eine endliche, abelsche Gruppe mit neutralem Element e und $S = \{e, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Es gilt stets: $g_1^2 \circ g_2^2 \circ \ldots \circ g_n^2 = e$.
6. Es gilt $(m^2 - n^2) \bmod (m - n) = 0$ für $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien G, E, U drei aussagenlogische Formeln, wobei G gültig ist, E erfüllbar, aber nicht gültig und U unerfüllbar.
Klassifizieren Sie die folgenden Formeln

1. $U \Rightarrow E$.
2. $G \wedge (E \vee U)$.
3. $E \Leftrightarrow U$
4. $(E \vee G) \wedge (E \vee U)$

in folgende drei Gruppen

- gültig
- erfüllbar, aber nicht gültig
- unerfüllbar.

Begründen Sie Ihre Antworten. Korrekte Antworten ohne jede Begründung erhalten keine Punkte.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

4 Personen bewerben sich um Arbeit. Es gibt Arbeit für 24 Stunden an einem Tag und jeder Person kann eine volle Stundenzahl zugeteilt werden. Aufgrund arbeitsrechtlicher Beschränkungen dürfen jeder Person höchstens 8 Stunden zugeteilt werden.

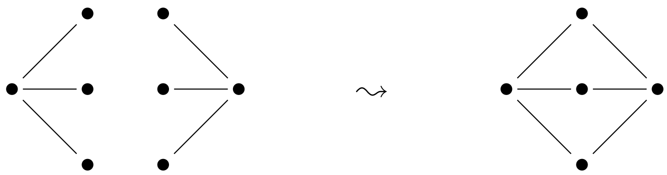
1. Wir nehmen an, dass es nicht gleichgültig ist, wer von den 4 Personen wie viel Arbeit bekommt. Berechnen Sie die Anzahl von Verteilungsmöglichkeiten der 24 Arbeitsstunden auf die 4 Personen, von denen einige auch leer ausgehen können.

2. Wir nehmen die 4 Personen als nicht unterscheidbar an und teilen einer Person vorab 8 Stunden zu. Berechnen Sie die Anzahl von Verteilungsmöglichkeiten der restlichen 16 Stunden auf 3 Personen, von denen einige auch leer ausgehen können.

Hinweis zu 1. und 2.: Bei Verteilung der vollen Stundenzahl von je 8 Stunden an 4 Personen müssen die zuviel zugeteilten 8 Stunden als „Ruhestunden" auf 4 Personen verteilt werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *2-Baum-Graph*, falls (informell) er in zwei Bäume B_1 und B_2 zerlegt werden kann, die an ihren Blättern verklebt sind, wobei sowohl B_1 als auch B_2 **mindestens einen** inneren Knoten besitzen. Beispiel:



Formal bedeutet dies: Es gibt eine Partition $\{E_1, E_2\}$ von E und eine Partition $\{V_1, V_2, W\}$ von V, so dass $B_1 := (V_1 \cup W, E_1)$ und $B_2 := (V_2 \cup W, E_2)$ jeweils Bäume sind, wobei V_1 bzw. V_2 die inneren Knoten und W die Blätter der beiden Bäume sind (mit V_1, V_2, W alle nicht leer).

1. Beschreiben Sie umgangssprachlich, aber möglichst präzise, ein allgemeines Verfahren, mit dem jeder 2-Baum-Graph mit 3 Farben eingefärbt werden kann.

   Begründen Sie, warum Ihr Verfahren stets eine korrekte 3-Färbung erzeugt.

2. Geben Sie einen 2-Baum-Graphen an, der nicht 2-färbbar ist.

   Begründen Sie, warum Ihr Graph nicht 2-färbbar ist.

3. Zeigen Sie, dass der K_4 kein 2-Baum-Graph ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Wir betrachten Graphen $G = (V, E)$ mit folgenden Eigenschaften:

- G ist eben und zusammenhängend.
- In einer ebenen Darstellung von G grenzen an **jedes** Gebiet genau 3 Kanten.
- Jeder Knoten von G hat Grad 4.

Mit g sei die Anzahl der Gebiete von G bezeichnet.

1. Zeigen Sie folgende Beziehungen:

$$(a)\ |E| = 2|V| \qquad (b)\ 2|E| \geq 3g.$$

2. Zeichnen Sie einen Graphen mit obigen Eigenschaften und $|E| = 12$.

   Der Graph in Ihrer Zeichnung soll eben sein, d.h., es dürfen sich keine Kanten kreuzen.

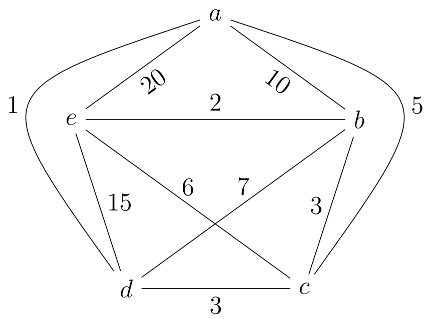
3. Kann es einen Graphen mit obigen Eigenschaften geben, der weniger als 12 Kanten besitzt?

   Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei $V = \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten einen vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



Berechnen Sie mithilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung des Knotens a zu allen anderen 4 Knoten von G!
In welcher Reihenfolge werden die Entfernungen nach Dijkstra berechnet? Das heißt, in welcher Reihenfolge werden die Knoten aus F entfernt?
Protokollieren Sie Ihre Berechnungen geeignet!

Welcher Pfad verbindet den Knoten a mit Knoten e mit minimaler Gewichtesumme?

Erinnerung: In einem kantengewichteten Graphen ist das Gewicht eines Weges die Summe seiner Kantengewichte. Die Entfernung zwischen zwei Knoten u und v ist dann das minimale Gewicht eines Weges zwischen u und v.

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $G_{m,n} = \langle S_{m,n}, \oplus \rangle$ die Algebra mit

- $S_{m,n} := \big\{(a,b) \mid a \in \{0,1,\ldots,m-1\}, b \in \{0,1,\ldots,n-1\}\big\}$.
- $(a,b) \oplus (c,d) = (a +_m c, b +_n d)$ für alle $(a,b),(c,d) \in S_{m,n}$.

Erinnerung: Mit $+_m$ wird die Addition modulo m bezeichnet, also $a +_m b := (a+b) \bmod m$.

1. Bei $G_{m,n}$ handelt es sich um eine abelsche Gruppe.

   Zeigen Sie formal die Existenz der Inversen und geben Sie das neutrale Element an.

2. Warum hat jedes Element $(a,b) \in S_{m,n}$ **höchstens** Ordnung $\mathrm{kgV}(m,n)$?

   Erinnerung: $\mathrm{kgV}(m,n)$ bezeichnet das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n.

3. Sind $G_{2,3}$ und $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ isomorph? Sind es $G_{2,2}$ und $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$?

   Begründen Sie Ihre Antworten. Hierfür ist es nicht notwendig Isomorphismen anzugeben!

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Es sei $G = \langle S, \circ, e \rangle$ eine Gruppe mit genau 4 Elementen $e, a, b, c \in S$, in der speziell für a gilt $a^2 = e$ mit dem neutralen Element e.

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.

2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.

3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.

   Zeigen Sie, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.
