Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Prof. Dr. Javier Esparza

Wintersemester 2008/09
Mittelklausur
20. Dezember 2008

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
. . . .	. . . .	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	. . . .

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von . . . . . . bis . . . . . . / von . . . . . . bis . . . . . .
Vorzeitig abgegeben um . . . . . .
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Wenn wahr, begründen Sie Ihre Antwort. Wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel an!

1. Seien $S, T \subseteq M \times M$ reflexive Relationen über M. Dann gilt für das Relationenprodukt $\circ$ die Gleichung $S \circ T = T \circ S$.
2. Falls die transitive Hülle R^+ einer Relation R symmetrisch ist, dann ist auch R symmetrisch.
3. Zur Formel $F = (x \land y) \lor (x \land \neg z)$ gibt es genau 3 minimale, passende Belegungen, die F wahr machen.
4. Jede total geordnete Menge ist abzählbar.
5. Es existiert eine Herleitung mit dem Herleitungskalkül der Ausssagenlogik für die Inferenz $\neg(F \lor G) \vdash (\neg F \land \neg G)$ bei beliebigen Formeln F und G.
6. Es gilt $\sqrt{2n} \in O(n)$.

   Hinweis: Hier ist eine Rechnung verlangt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien a, b, x, y Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular des Aussagenkalküls.

1. Zeigen Sie, dass der folgende Ausdruck eine Tautologie darstellt:

$$((a \Rightarrow a \wedge b) \wedge (a \vee b \Rightarrow a)) \Rightarrow (a \Leftrightarrow b) .$$

2. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die folgende semantische Äquivalenz:

$$x \vee \neg(y \vee \neg x) \equiv x .$$

   Verwenden Sie hierfür nur die auf dem Formelblatt angegebenen Äquivalenzen und geben Sie jeweils die von Ihnen verwendeten Regeln an.

   Hinweis: Benutzen Sie an geeigneter Stelle die Äquivalenz $x \equiv x \wedge \mathsf{true}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Parkplatz mit 12 linear geordnet nebeneinander liegenden Stellplätzen mit Nummern 1 bis 12. Zwei Belegungen des Parkplatz werden als gleich betrachtet, wenn dieselben Stellplätze belegt sind.

1. Wie viele Belegungen des Parkplatzes mit 3 Fahrzeugen gibt es?

2. Wir nehmen nun an, dass der Parkplatz nur durch große Fahrzeuge belegt wird, die jeweils 2 nebeneinander liegende Stellplätze benötigen.

   Wie viele Belegungen des Parkplatzes mit 3 großen Fahrzeugen gibt es?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

1. Seien G, H prädikatenlogische Formeln, so dass die Formel $\exists x(G \Rightarrow H)$ gültig ist. Zeigen Sie, dass die Formel
$$\forall x(G \wedge \neg H)$$
nicht erfüllbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die folgende prädikatenlogische Formel F erfüllbar, aber nicht gültig ist.
$$F = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists y(Q(y) \Rightarrow P(y)) \,.$$
Geben Sie hierfür zwei Strukturen (U_1, I_1) und (U_2, I_2) mit **nicht leeren** Universen an, so dass sich F unter (U_1, I_1) zu wahr und unter (U_2, I_2) zu falsch auswertet.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Die Stirlingzahlen 2. Art $S_{n,k}$ geben Auskunft über die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge. Bekanntlich gilt z. B. $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ für alle $n \geq 1$. Außerdem gilt für alle $n, k \geq 0$ die Rekursion $S_{n+1,k+1} = S_{n,k} + (k+1) \cdot S_{n,k+1}$.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Partitionen einer 4-elementigen Menge A.

2. Wie viele surjektive Abbildungen $f : A \to B$ gibt es für $|A| = 4$ und $|B| = 3$?

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 2$ die Ungleichung

$$S_{n,2} \geq \binom{n}{2}.$$

   Hinweis: Sie können direkt argumentieren oder Induktion verwenden.

4. Zeigen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 3$ die Ungleichung

$$S_{n,3} \geq \binom{n}{3}.$$

   Hinweis: Sie dürfen hier das Ergebnis aus Teilaufgabe 3. benutzen, egal ob Sie es bewiesen haben oder nicht.

Formelblatt

Äquivalenzregeln des Aussagenkalküls für $\wedge, \vee, \neg$

Seien F, G und H beliebige Aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

Identität:	$F \wedge \mathsf{true} \equiv F$,	$F \vee \mathsf{false} \equiv F$.
Dominanz:	$F \vee \mathsf{true} \equiv \mathsf{true}$,	$F \wedge \mathsf{false} \equiv \mathsf{false}$.
Idempotenz:	$F \vee F \equiv F$,	$F \wedge F \equiv F$.
Doppelte Negation:	$\neg\neg F \equiv F$.	
Triviale Tautologie:	$F \vee \neg F \equiv \mathsf{true}$,	
Kontradiktion:		$F \wedge \neg F \equiv \mathsf{false}$.
Kommutativität:	$F \vee G \equiv G \vee F$,	$F \wedge G \equiv G \wedge F$.
Assoziativität:	$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$,	
	$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$.	
Distributivität:	$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$,	
	$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$.	
De Morgan:	$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$,	
	$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$.	