
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: entfällt

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.

Vorbereitung 1

Wir fassen die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und 4 zu einer Menge A zusammen.

1. Beschreiben Sie A
 - (a) extensional,
 - (b) intensional,
 - (c) als Durchschnitt 5-elementiger Mengen,
 - (d) als Vereinigung 3-elementiger Mengen,
 - (e) als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen,
 - (f) als Komplement einer Menge,
 - (g) als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen.
2. Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste.

Vorbereitung 2

Wir fassen die Buchstaben a , b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.
2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b , und b kommt vor c , und insgesamt kommt a auch vor c).
Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!
3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!
4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Tutoraufgabe 1

(Wiederholen Sie zunächst kurz die Begriffe und Lösungen zu Vorbereitungsaufgabe 1.)

Sei U eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge X von U sei $\overline{X} = U \setminus X$ das sogenannte Komplement von X bezüglich U . Seien A und B beliebige Teilmengen von U .

1. Geben Sie ein Beispiel für A, B an, so dass die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nicht gilt. Für welche Mengen A, B gilt die Gleichung?
2. Zeigen Sie $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A_i \subseteq U$ für alle $i \in [n]$. Zeigen Sie für $n = 3$ die Gleichung

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

Wie kann man den Beweis dieser Gleichung für $n = 4$ zurückführen auf den Beweis der Gleichung für $n = 3$? Wie kann man diesen Schritt verallgemeinern?

Tutoraufgabe 2

(Wiederholen Sie zunächst kurz die Begriffe und Lösungen zu Vorbereitungsaufgabe 2.)

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3 , die die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.
2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv.
3. Die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch.
4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1 .

Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung!

In welcher Weise wird das Urbild von R_3 partitioniert?