Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 10
15. Dezember 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 7. Januar 2009, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1.000.010 gibt es, so dass die Summe der einzelnen Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ ihrer Dezimaldarstellung genau 16 beträgt?

2. Wie viele Binärwörter der Länge n (nur Buchstaben 0 und 1) gibt es, die die Ziffernfolge "01" genau dreimal enthält?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Münzen auf 9 unterscheidbare Personen zu verteilen?

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?

3. Wie viele Partitionen einer 12-elementigen Menge gibt es, wenn nur diejenigen Partitionen gezählt werden, die aus 6 Klassen mit je 2 Elementen bestehen?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein gleichseitiges Dreieck lässt sich von seinem Mittelpunkt aus in 3 deckungsgleiche gleichschenklige Teildreiecke zerlegen, die 2 Winkel von je 30 Grad und einen Winkel von 120 Grad besitzen.
Wir konstruieren nun abstrakte, 2-dimensionale Spielsteine in Gestalt gleichseitiger Dreiecke, indem wir 3 der genannten deckungsgleichen gleichschenkligen Dreiecke nehmen, jedes dieser Dreiecke rot, grün oder blau färben und zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen.

1. Wie viele verschiedene Spielsteine lassen sich konstruieren, wenn Teildreiecke genau dann unterscheidbar sind, wenn sie nicht gleich gefärbt sind, und zwei Spielsteine genau dann gleich sind, wenn sie durch Verschiebung und Drehung zur Deckung gebracht werden können.

2. Wir lassen nun beim Vergleich der Spielsteine zu, dass die Steine gespiegelt werden. Dann sind also zwei Spielsteine gleich, wenn sie ineinander gespiegelt werden können.

   Wie viele verschiedene Spielsteine können nun konstruiert werden, wenn $n \geq 3$ Farben zugelassen werden? Geben Sie eine Berechnungsformel an!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Es kommen n Kunden in einen Buchladen. In dem Buchladen gibt es m verschiedene Bücherstapel. Jeder Bücherstapel besteht aus mindestens n Büchern eines bestimmten Werkes. Jeder Kunde kauft genau ein Buch. Am Ende des Tages stellt der Buchhändler fest, dass von k verschiedenen Bücherstapeln Bücher gekauft worden sind.

Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Verteilung der Bücher auf die Kunden, wenn man nicht weiß, von welchen Stapeln die Bücher genommen wurden?
(Die Kunden seien unterscheidbar und die Werke aus verschiedenen Stapeln seien unterscheidbar; zwei Ausgaben des gleichen Werkes seien nicht unterscheidbar.)

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Sei M eine nicht leere, endliche Menge und $f : M \to M$ eine bijektive Abbildung. Eine nicht leere Teilmenge S von M nennen wir *stabil (unter f)*, wenn $f(S) \subseteq S$ gilt. Eine stabile Menge S nennen wir einen Zyklus, wenn S keine unter f stabile echte Teilmenge enthält.

1. Zeigen Sie, dass jede bijektive Abbildung $f : M \to M$ die Menge M in Zyklen partitioniert.
2. Geben Sie ein Beispiel einer Permutation $f : M \to M$, so dass M durch 2 3-elementige Zyklen partitioniert wird.

Vorbereitung 2

Die Komposition $f \circ g$ von Abbildungen f und g ist durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ definiert. Dies gilt insbesondere für Permutationen einer Menge $[n]$. Die Menge der Permutationen von $[n]$ zusammen mit der Komposition $\circ$ bildet eine sogenannte Algebra, die wir später die Symmetrische Gruppe S_n nennen werden.

Wir betrachten die folgenden Permutationen q, r, s aus S_6

$$q = (1\ 5\ 6)\,, \qquad r = (3\ 4\ 5\ 2)\,, \qquad s = (3\ 2\ 1)\,.$$

q, r, s sind hier in der Zyklenschreibweise angegeben, wobei Zyklen der Länge 1 weggelassen wurden. Beispielweise gilt $q(1) = 5$ und $q(3) = 3$.
Sei

$$p = q \circ r \circ s\,.$$

1. Geben Sie p als Liste von Paaren $(x, p(x))$ an.
2. Geben Sie p als Komposition von disjunkten zyklischen Permutationen an.

   Hinweis: Permutationen $s \in S_n$ und $t \in S_n$ heißen disjunkt, falls für alle $x \in [n]$ gilt $s(x) = x$ oder $t(x) = x$.

Vorbereitung 3

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Permutationen einer n-elementigen Menge mit k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$s_{0,0} = 1, \quad s_{n,n} = 1. \quad s_{n,k} = 0, \text{ falls } k > n. \quad s_{n,0} = 0, \text{ falls } n > 0\,.$$

2. Die Rekursion $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist aus der Vorlesung bekannt. Studieren Sie die Darstellung der Rekursion bis $n + k = 8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 1$: $s_{n,1} = (n-1)!$.

Vorbereitung 4

Gegeben sei der Graph

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, h\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{g, h\}\}) .$$

Stellen Sie für den Graph G

1. die Inzidenzmatrix und
2. die Adjazenzmatrix auf.
3. Welche Zusammenhangskomponenten hat G?
4. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G.

Tutoraufgabe 1

Tante Erna macht Tee und es kommen n Gäste. Es bilden sich wie immer Gruppen und Grüppchen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen.
Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es, wenn Tante Erna zunächst nicht dabei ist?

2. Tante Erna schließt sich nun einer der k Gruppen an. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?

3. Wir nehmen nun an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen bzw. stehen will. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (Erna sei nicht dabei) ?

Tutoraufgabe 2

Die absteigende Gradfolge eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0$. ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2$. iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Tutoraufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass der Graph C_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ bipartit ist.
   Gilt das Gleiche auch für C_{2n+1}?

2. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Tutoraufgabe 4

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *vollständig*, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind. Ein *(Knoten-)induzierter Teilgraph* G' von G ist ein Graph $G' = (V', E')$, so daß $V' \subseteq V$ und $E' = \{\{v, w\} \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\}$.

1. Wie viele Kanten hat der Graph K_n?

2. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen enthält der K_n?

3. Wie viele Sterne vom Grad k enthält der K_n?
   Ein Stern vom Grad k besteht aus $k+1$ Knoten und k Kanten. Einer der Knoten (die Mitte) hat Grad k, alle anderen Knoten haben Grad 1. "Enthalten sein" bedeutet in diesem Fall, dass man so lange Kanten entfernt, bis ein Stern übrig bleibt.

4. Nun entfernt man eine Kante in K_n. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen gibt es nun?