Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 11
7. Januar 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 12. Januar 2009, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele verschiedene Tupel (A_1, A_2) mit disjunkten $A_1, A_2 \subseteq [n]$ gibt es? Begründung!

2. Wie viele Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^5$ der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

gibt es?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch kombinatorische Überlegungen und direkte Rechnung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Gültigkeit der folgenden Gleichung für die Stirlingzahl 2. Art $S_{n,n-2}$.

$$S_{n,n-2} = \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (3n-5)\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die sogenannte n-te Bellzahl B_n gibt die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge an. Man kann den Partitionen o. B. d. A. die Menge $[n]$ zu Grunde legen.

1. Sei T_k eine k-elementige Teilmenge von $[n]$. Zeigen Sie, dass für die Anzahl a der Partitionen von $[n+1]$, die $T_k \cup \{n+1\}$ als eine Klasse enthalten, folgendes gilt.

$$a = B_{n-k}\,.$$

2. Zeigen Sie nun, dass für die Bellzahlen für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Rekursiongleichung erfüllt ist.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt.*

Vorbereitung 1

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort auf die folgenden Fragen.

1. Kann man eine endliche, nicht leere Menge A zusammen mit der leeren Relation $\emptyset = R \subseteq A \times A$ als einfachen Graphen betrachten?
2. In welcher Weise definiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $[n]$ zusammen mit der Menge $A_n = \{\{x, y\} \mid 1 = |x - y| \text{ und } x, y \in [n]\}$ einen einfachen Graphen?
   Geben Sie für $n = 6$ eine zeichnerische Darstellung des zugeordneten Graphen an!
   Ändern Sie die Definition von A_n so ab, dass der zugeordnete Graph alle möglichen Schleifen enthält und vervollständigen Sie Ihre Zeichnung entsprechend.
3. Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ disjunkte Graphen, d. h. es gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann nennen wir G_1, G_2 eine disjunkte Zerlegung des Graphen $G = (V, E) = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Zeigen Sie, dass sich jede Äquivalenzrelation mit mehr als einer Äquivalenzklasse über einer endlichen Menge disjunkt in vollständige Graphen zerlegen läßt, wobei wir Schleifen nicht berücksichtigen wollen.

Vorbereitung 2

1. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann mindestens 2 Komponenten besitzt, wenn er sich disjunkt zerlegen läßt (siehe die vorausgehende Aufgabe).
2. Welcher Zusammenhang besteht in der vorausgehenden Aufgabe zwischen der Anzahl der Äquivalenzklassen und der Anzahl der Komponenten des zugeordneten Graphen?
3. Beschreiben Sie die Gestalt der Adjazenzmatrix eines Graphen mit 2 Komponenten mittels 4 Untermatrizen, von denen 2 die Nullmatrix sind, deren Elemente also alle den Wert Null haben.

Vorbereitung 3

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_2$ gilt. Es gilt definitionsgemäß $V = U_1 \cup U_2 = V_1 \cup V_2$.
Zeigen Sie:
Falls die Zerlegung B_1 vollständig ist in dem Sinne, dass $E = \{\, \{u_1, u_2\} \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ gilt, dann gilt $B_1 = B_2$, d. h. die bipartite Zerlegung ist eindeutig.

Hinweis: Der gezeigte Sachverhalt begründet die Definierbarkeit vollständiger bipartiter Graphen.

Vorbereitung 4

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ endliche Mengen und f eine Funktion mit $f : A \to B$.

1. Zeigen Sie, dass man f durch einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ beschreiben kann, aus dem sich das Attribut $f : A \to B$ ablesen läßt.
2. Durch welche Eigenschaft von G ist die Surjektivität von f auf B gekennzeichnet?
3. Geben Sie für $A = [5]$, $B = [10]$ und $f(x) = x + 5$ alternative zeichnerische Darstellungen an. Zeichnen Sie die Kanten des Graphen zum einen als Punkte in einem Koordinatensystem, und zum anderen als Verbindungspfeile zwischen Knoten, die als Punkt gezeichnet sind.

Tutoraufgabe 1

(*Es wird insbesondere VA 3 vorausgesetzt.*)

1. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_1$, $U_1 \neq V_2$ gilt.

   Zeigen Sie, dass G zwei verschiedene Komponenten besitzt.

2. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$. Beweis!

Tutoraufgabe 2

Bekanntlich werden die vollständigen bipartiten Graphen mit $K_{\{n,m\}}$ bezeichnet, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Wir legen durch Definition fest, dass bipartite Graphen $G = (V, E)$ stets mindestens eine Kante besitzen, E also nicht leer ist.
Ein Knoteninduzierter Teilgraph von G ist ein Graph $G' = (V', E')$, so dass $V' \subseteq V$ und $E' = \{\, \{v, w\} \in E \mid v, w \in V' \,\}$.

1. Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Anzahl aller bipartiten Knoteninduzierten Teilgraphen eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{\{n,m\}}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

2. Ein Teilgraph eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$, so dass $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Wie viele bipartite Teilgraphen $G' = (V', E')$ von $K_{\{n,m\}}$ mit gleicher Knotenmenge ($|V'| = n + m$) gibt es? Geben Sie eine Formel zur Berechnung der gesuchten Anzahl an!

Tutoraufgabe 3

Die Länge eines Weges w in einem Graphen ist definiert als die Anzahl der Vorkommen von Kanten in w. Der Abstand $d(u, v)$ zweier verschiedener Knoten u und v in einem einfachen, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als das Minimum aller Längen von Wegen mit Anfangsknoten u und Endknoten v. Zudem wird $d(u, u) = 0$ gesetzt.

1. Zeigen Sie, dass es stets einen Pfad der Länge $d(u, v)$ gibt mit Anfangsknoten u und Endknoten v.

2. Zeigen Sie die Symmetrie $d(u, v) = d(v, u)$ und die Dreiecksungleichung $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$.

Tutoraufgabe 4

Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so dass $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.