Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 12
12. Januar 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 19. Januar 2009, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie mithilfe eines kombinatorischen Arguments, dass für die Stirlingzahlen 1. Art gilt:

$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24} n \cdot (n-1)(n-2)(3n-1)\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i der Menge $[5] \subseteq \mathbb{N}$.

$$p_1 = (1\ 5\ 4)\,, \qquad p_2 = (2\ 5\ 1)\,, \qquad p_3 = (3\ 5\ 2)\,, \qquad p_4 = (4\ 5\ 3)\,.$$

Die Abbildungen p_i sind hier in der Zyklenschreibweise angegeben, wobei Zyklen der Länge 1 weggelassen wurden. Beispielweise gilt $p_1(3) = 3$ und $p_4(2) = 2$. Sei

$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4\,.$$

1. Geben Sie p als Komposition von disjunkten zyklischen Permutationen an.
2. Bestimmen Sie die kleinste Potenz $k > 0$, so dass $(p_1 \circ p_4)^k$ gleich der identischen Abbildung id ist $(\forall x(id(x) = x))$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit (aufsteigender) Gradfolge $1, 2, 3, 4, 4, 4, 4$ zusammenhängend ist. Wie viele Kanten besitzt jeder solche Graph?
2. Geben Sie 2 nicht isomorphe Graphen an mit Gradfolge $1, 2, 3, 4, 4, 4, 4$. Begründung!
3. Zeigen Sie, dass es keinen bipartiten Graphen mit Gradfolge $1, 2, 3, 4, 4, 4, 4$ gibt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ und $k \in N, 2 \leq k < n$.
Wie viele verschiedene Graphen mit Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, so dass der auf den Knoten $1, 2, \ldots, k+1$ induzierte Teilgraph ein Stern vom Grad k ist.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt.*

Vorbereitung 1

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.
   Hinweis: Enfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
   Hinweis: Ein Graph heißt k-regulär, wenn alle Knoten den Grad k haben.
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!

Vorbereitung 2

1. Gegeben seien die Bäume

   $B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\})\,,$
   $B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 3\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\})\,.$

   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.
2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) 6 7 7 7 7 7 7 7 , ii) 1 1 1 2 1 2 1 , iii) 3 4 5 6 7 8 9 .

Vorbereitung 3

1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten. Mit $\binom{V}{2}$ bezeichnen wir die Menge der 2-elementigen Teilmengen von V. Es gilt also $E \subseteq \binom{V}{2}$. Dann nennt man $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ den Komplementärgraphen von G.
   (a) Konstruieren Sie für alle $n \in [4]$ 2-(Knoten-)färbare Graphen, deren Komplementärgraph ebenfalls 2-(Knoten-)färbbar ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für $n > 4$ entweder G oder $\overline{G}$ nicht 2-(Knoten-)färbbar ist.
2. Geben Sie einen nicht-planaren Graphen an mit chromatischer Zahl $\chi(G) = 3$)!
3. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl 17 nicht planar ist.

Vorbereitung 4

Wir betrachten die Menge [4] von natürlichen Zahlen als linear geordnete Knotenmenge eines Suchbaumes B.

1. Listen Sie alle möglichen Suchbäume mit [4] als Knotenmenge auf.
2. Wie viele Knoten muß der kleinste vollständige Suchbaum enthalten, der alle Knoten von B enthält?

Tutoraufgabe 1

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \backslash \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Tutoraufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie, u. a. mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.
2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.
3. Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph, d h. G enthalte keinen K_3 als Teilgraph.
Sei G planar.

1. Zeigen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel: $|E| < 2|V|$.

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Polyederformel zunächst nur auf Komponenten von G anwendbar ist.
2. Beweisen Sie: Falls G unzusammenhängend ist, dann besitzt G zwei Knoten vom Grad höchstens 3.

Tutoraufgabe 4

1. Beweisen Sie: Ein Graph mit chromatischer Zahl 3 enthält einen Kreis ungerader Länge.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der bestimmt, ob ein beliebiger Graph $G = (V, E)$ ein Baum ist.