Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 13
19. Januar 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 26. Januar 2009, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{6,3\}, \{7,2\}, \{8,2\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.

2. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code 2,3,4,3,2 dargestellt wird.

3. An welcher charakteristischen Eigenschaft des Prüfer-Codes erkennt man, ob der dargestellte Baum ein Pfad ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir nennen einen Graphen mit mindestens 4 Knoten "fast-4-regulär", wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.
Wir betrachten im Folgenden bipartite Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $E \subseteq \{\{a,b\} \mid (a,b) \in A \times B\}$.
Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graphen G mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.

2. Für alle $n \geq 1$ gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $|A| = |B| = 2n$.

   Führen Sie den Beweis durch Induktion über n. Der Induktionsschritt von n auf $n+1$ kann durch Zeichnung klargemacht werden.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $G = (V, E)$ ein $(n-2)$-regulärer Graph mit n Knoten.

1. Geben Sie mit $n = 6$ ein Beispiel für G an.

2. Zeigen Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt $\chi(G) = \frac{n}{2}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Geben Sie die Gradfolge des resultierenden Spannbaumes an, der entsteht, wenn man den vollständigen bipartiten Graphen $K_{\langle n,n \rangle}$ mit dem Algorithmus der Tiefensuche durchsucht. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt.*

Vorbereitung 1

Wir betrachten für Graphen $G = (V, E)$ die erweiterte Form des generischen Suchalgorithmus, in der für jeden besuchten Knoten v dessen Vorgänger $pred[v]$, die Suchnummer $n[v]$ und die Suchtiefe $d[v]$ bestimmt werden.

1. Begründen Sie, warum bei Ausführung des Suchalgorithmus die Suchtiefe für einen Knoten nie überschrieben wird.
2. Bei welchen Auswahlstrategien von Elementen aus der „Worklist W“ besteht W stets aus Knoten mit Suchnummern aus einem Abschnitt $[m, n] = [n] \setminus [m-1]$?
3. Ist das Ergebnis der Suchtiefe eines Knotens v bei Anwendung des generischen Suchalgorithmus mit den Strategieen der Breitensuche einerseits oder der Tiefensuche andererseits mit gleichem Startknoten das Gleiche? Begründen Sie Ihre Antwort ggf. mit einem Beispiel!
4. Der Suchalgorithmus werde mit der Strategie der Breitensuche durchgeführt. Nehmen Sie an, dass u vor v aus der Worklist entfernt wird. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $d[u] = d[v]$ gilt.

Vorbereitung 2

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z. $a \equiv b \pmod{m}$, falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h., falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $a = b + k \cdot m$ gilt. Genau dann wenn $a \equiv b \pmod{m}$ und gleichzeitig $0 \le b < m$ gilt, dann gilt $b = a \bmod m$. Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation mod zugrunde legen.
In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division a div m zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a = (a \text{ div } m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

1. Berechnen Sie: (i) 5 div 6, (ii) (-5) div 6, (iii) x div 1.
2. Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a \pm m) \operatorname{div} m = a \operatorname{div} m \ \pm 1.$$

3. Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a \cdot n) \text{ div } (m \cdot n) = a \operatorname{div} m\,.$$

Vorbereitung 3

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \bmod m \pmod{m}, \\ (a+b) \bmod m &= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m . \end{aligned}$$

Vorbereitung 4

Zeigen Sie, dass im Folgenden Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ definiert werden, die bezüglich des binären Operators $\circ$ eine kommutative Gruppe bilden.

1. Sei $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$

$$x \circ y = x + y + xy.$$

2. Sei S gleich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ $(= 2^X)$ einer beliebigen Menge X und sei $\circ$ gegeben durch

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Tutoraufgabe 1

(*Die Bearbeitung von VA 1 wird vorausgesetzt.*)
Wir führen den Suchalgorithmus mit Breitensuche für einen Graphen $G = (V, E)$ aus mit Startknoten $v_0 \in V$. Man zeige:

1. $\{u, v\} \in E \;\Rightarrow\; d[u] \leq d[v] + 1\,.$
2. Bei Ausführung des Algorithmus gibt es in jedem Zeitpunkt ein k, so dass für alle Knoten v in der Worklist gilt: $k \leq d[v] \leq k + 1\,.$
3. Falls u vor v aus der Worklist entfernt wird, dann gilt $d[u] \leq d[v]\,.$

Tutoraufgabe 2

Gegeben ist die folgende Entfernungstabelle. Ein Strich (" -") bedeutet, dass keine direkte Verbindung zwischen den Städten angenommen wird. Andernfalls ist die Entfernung in Kilometern angegeben.

	Dortmund	Frankfurt	Karlsruhe	Kassel	Köln	Nürnberg	Mannheim	München	Stuttgart	Ulm
Dortmund	.	-	-	165	83	-	-	-	-	-
Frankfurt	-	.	-	-	189	228	88	-	-	294
Karlsruhe	-	-	.	-	-	-	68	-	82	-
Kassel	165	-	-	.	-	182	-	-	-	465
Köln	83	189	-	-	.	-	-	-	-	-
Nürnberg	-	228	-	182	-	.	-	165	-	-
Mannheim	-	88	68	-	-	-	.	-	-	-
München	-	-	-	-	-	165	-	.	-	138
Stuttgart	-	-	82	-	-	-	-	-	.	92
Ulm	-	294	-	465	-	-	-	138	92	.

1. Zeichnen Sie den zu der Entfernungstabelle gehörigen (ungerichteten) gewichteten Graphen.
2. Bestimmen Sie nach dem Algorithmus von Dijkstra die Entfernung von München nach Köln.
3. Wie müssen Sie den Algorithmus von Dijkstra modifizieren, damit Sie den kürzesten Weg von München nach Köln als Resultat erhalten?

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einer 4-elementigen Trägermenge S und einer Operation $\circ$, die die folgende (2-seitige) Kürzungsregel erfüllt für alle $x, x', y \in S$

$$x \circ y = x' \circ y \;\Rightarrow\; x = x' \quad \wedge \quad y \circ x = y \circ x' \;\Rightarrow\; x = x' \,.$$

Wir fordern außerdem, dass alle "Quadrate" von Elementen aus A (d. h. aus S) linksneutral (linkes Einselement) sind, d. h., dass für alle $x, y \in S$ gilt

$$(x \circ x) \circ y = y \,.$$

1. Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen linken Einselements in A, i. Z. $1_l \in A$.
2. Wir nehmen an, dass 1_l auch rechtes Einselement ist, und können in diesem Fall 1 schreiben für 1_l. Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!

   Machen Sie sich zunächst klar, was die (2-seitige) Kürzungsregel für die Elemente der Spalten bzw. Zeilen der Verknüpfungstafel bedeutet.
3. Wir nehmen nun an, dass 1_l nicht auch rechtsneutral (rechtes Einselement) ist.
   (a) Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!
   (b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Verknüpfungstafel bis auf Isomorphie!
   (c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\circ$ nicht assoziativ und die Algebra A damit keine Halbgruppe ist!
4. Besitzt A in jedem Fall eine echte Unteralgebra? Begründung!

Tutoraufgabe 4

Zeigen Sie: Die Menge U aller Elemente x einer abelschen Gruppe G, deren Inverses x^{-1} eine Potenz von x ist, bildet eine Untergruppe von G.