Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 14
26. Januar 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 2. Februar 2009, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Wir gehen von dem in der Tutoraufgabe 2 von Übungsblatt 13 gegebenen Graphen aus, der die Entfernung zwischen bestimmten Städten beschreibt.

1. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum dieses Graphen.

2. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass durch einen Unfall die Verbindung zwischen Köln und Frankfurt in beiden Richtungen gesperrt ist.

   Bestimmen Sie nach dem Algorithmus von Dijkstra die durch den entsprechend modifizierten Verbindungsgraphen gegebene Entfernung zwischen München und Köln.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Für die folgenden Berechnungen kann u. a. benutzt werden, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt $(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m$.

1. Berechnen Sie

   (i) $x = 19 \bmod 3$, (ii) $y = 3^{30} \bmod 5$, (iii) $z = (-20) \bmod 7$.

2. Berechnen Sie $(10^{17} + 5^{23} - 30^{100}) \bmod 6$.

3. Bestimmen Sie $2^{7346790100} \bmod 14$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Man zeige: Die 6 rationalen Funktionen x, $\frac{1}{x}$, $1 - x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$ bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition $f \circ g$.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $G = \langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe mit e als neutralem Element. Wir schreiben $\mathrm{ord}(x)$ für die Ordnung eines Elementes x.

1. Seien $a, b \in S$. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathrm{ord}(a \circ b)$ und $\mathrm{ord}(b \circ a)$? Beweis!

2. Seien $a, b \in S$ verschiedene, nicht vertauschbare Elemente mit $a^2 = e$, $b^2 = e$ und $(a \circ b)^2 = (b \circ a)^2$. Zeigen Sie, dass gilt $\mathrm{ord}(a \circ b) = 4$.

3. Zeigen Sie, dass G nicht notwendigerweise eine endliche Ordnung besitzt.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Geben Sie alle Untergruppen der folgenden Gruppen an.

1. $\langle \mathbb{Z}_{15}, +_{15} \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Welche der betrachteten Untergruppen sind zyklisch? Begründung!

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt.*

Vorbereitung 1

1. Sei $S' = \langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe. Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar in S', falls gilt $(\forall a \in S)\,[\,a \circ x = x \circ a]$. Es sei $V(S')$ die Menge aller in S' vertauschbarer Elemente von S.

   Zeigen Sie, dass $V(S')$ eine Unterhalbgruppe von S' erzeugt.

2. Sei $M = \langle S, \circ \rangle$ ein Monoid mit neutralem Element 1. Wir nehmen an, dass für alle $x \in S$ gilt $x \circ x = 1$.

   Zeigen Sie, dass M eine abelsche Gruppe ist.

Vorbereitung 2

1. Zeigen Sie, dass gilt $\{(5k) \bmod 12 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_{12}$.
2. Welche Ordnung besitzt 9 in $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$? Beweis!

Vorbereitung 3

Im Folgenden nehmen wir 0 bzw. 1 als die entsprechenden neutralen Elemente bezüglich $+$ bzw. $\cdot$ in die Signatur von Ringen mit auf.
Man zeige:

1. In einem beliebigen Ring $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ gelten die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0\,, \\ a \cdot b &= (-a) \cdot (-b)\,. \end{aligned}$$

2. Geben Sie einen nicht-kommutativen Ring an.

Vorbereitung 4

Geben Sie eine Zahl k an, so dass $p^k = id$ gilt für alle Elemente p der Symmetrischen Gruppe S_5 (Gruppe der Permutationen einer Menge mit 5 Elementen und der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung). $id \in S_5$ sei dabei das neutrale Element von S_5 (Identität).

Tutoraufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.
2. In jeder zyklischen additiven Gruppe mit ungerader Ordnung ist die Summe aller Elemente gleich ihrem neutralen Element 0.
3. Es gibt keine zyklische additive Gruppe mit gerader Ordnung, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.
4. Es gibt keine Gruppe mit Primzahlordnung p, die eine echte Untergruppe enthält, i. e. eine Untergruppe weder von der Ordnung p, noch von der Ordnung 1.
5. Ist jede Gruppe der Ordnung 11 kommutativ? Begründung!

Hinweis: Eine Gruppe nennt man additiv/multiplikativ, wenn man die Verknüpfung als Summe/Produkt bezeichnen will. Inhaltlich gibt es keinen Unterschied zwischen additiven und multiplikativen Gruppen.

Tutoraufgabe 2

$\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot_n \rangle$ mit $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n \text{ und } ggT(x, n) = 1\}$ und $n > 1$ ist bekanntlich eine Gruppe.
Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_{10}^*, \cdot_{10} \rangle$ zyklisch ist.
Welche Untergruppen besitzt $\langle \mathbb{Z}_{10}^*, \cdot_{10} \rangle$? Begründung!

Tutoraufgabe 3

Beweisen Sie:

1. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Ring $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen, d. h. $S = \{0, 1, a\}$. Insbesondere muß also R isomorph sein zum Ring $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3, 0, 1 \rangle$.
2. Der Ring $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen ist ein Körper.
3. Sei t_x die Anzahl der Nullteiler eines Ringelementes $x \in S \setminus \{0\}$ eines endlichen, kommutativen Ringes $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Dann ist $t_x + 1$ ein Teiler der Anzahl $n = |S|$ aller Ringelemente.

   Hinweis: $y \in S \setminus \{0\}$ ist ein Nullteiler von $x \in S \setminus \{0\}$, falls $x \cdot y = 0$.

Tutoraufgabe 4

1. Die Charakteristik eines Körpers K, i. Z. $char(K)$, ist definiert als die Ordnung des Elements 1 in der additiven Gruppe von K. Man zeige:

   $$p = char(K) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ ist eine Primzahl}.$$

2. Geben Sie die Verknüpfungstafeln eines Körpers mit 4 Elementen an. Welche Charakteristik hat dieser Körper?

   Begründen Sie Ihre Angaben!