
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 3. November 2008, 18 Uhr in die DS Briefkästen

Vorbemerkung: Hausaufgaben sollen grundsätzlich eine Lernkontrolle darstellen für den in vorausgegangenen Tutoraufgaben oder selbständig bereits durchgearbeiteten Stoff. Hausaufgaben haben auch Wiederholungscharakter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt allerdings greifen die Hausaufgaben naturgemäß auf Stoff zurück, der Schulstoff ist oder in Vorkursen erworben wird. Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe (Termin siehe oben) die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die natürliche Zählung beginnt bei 1 und kann beliebig fortgesetzt werden. Sie durchläuft die unendliche Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen. Wir verwenden die Bezeichnungen \mathbb{N}_0 für die um die Zahl 0 erweiterte Menge \mathbb{N} , und \mathbb{Z} für die \mathbb{N}_0 umfassende Menge der ganzen Zahlen. Wir setzen die \mathbb{Z} umfassende Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen und deren Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) als bekannt voraus, aus der Schule oder eigener Recherche.

1. Ist 1 ein Teiler von 5? Ist 1 eine Primzahl? Was ist der größte gemeinsame Teiler von 986 und 987 ($= \text{ggT}(986, 987)$)? Welchen Wert besitzt $\text{ggT}(78, 240)$?
2. Jede positive rationale Zahl kann bekanntlich durch einen Bruch $\frac{a}{b}$ dargestellt werden, wobei a und b natürliche Zahlen bedeuten. a heißt Zähler und b heißt Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$.

Geben Sie eine Regel an, die definiert, wann zwei Brüche die gleiche positive rationale Zahl darstellen! Welche Rolle kann dabei der ggT von Zähler und Nenner eines Bruchs spielen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Für rationale Zahlen ist eine Ordnungsbeziehung $<$ definiert. Überlegen Sie, wann $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$!

1. Geben Sie für solche Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ einen Bruch $\frac{x}{y}$ an, so dass $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ gilt!
2. Zeigen Sie: Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist dicht.
Hinweis: Eine (geordnete) Menge heißt dicht, wenn zwischen je zwei Elementen der Menge unendlich viele weitere Elemente der Menge liegen.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass es eine \mathbb{Q} umfassende Menge \mathbb{R} reeller Zahlen gibt, so dass es für alle positiven rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets eindeutig eine positive Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$ gibt. y heißt dann die n -te Wurzel aus x , i. Z. $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Begründen Sie, warum es keine rationale Zahl $y = \frac{m}{n}$ geben kann, so dass $(\frac{m}{n})^2 = 7$ gilt!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ besitzen eine Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n d_{n+1} \dots$. Die Ziffern d_i bezeichnen dabei natürliche Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Um Eindeutigkeit zu erzielen, verlangt man, dass es keinen Index j gibt, so dass für alle $i > j$ $d_i = 9$ gilt.

Geben Sie eine Vorschrift für die Addition zweier Zahlen $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots \in \mathbb{R}$ und $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1} \dots \in \mathbb{R}$ an. Nehmen Sie dabei an, dass es keinen Index j gibt, so dass für alle $i > j$ die Gleichung $a_i + b_i = 9$ gilt.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.

Vorbereitung 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche \leq -Ordnung der Zahlen [6].
Wie ergibt sich die \leq -Ordnung auf [6] aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation \leq auf \mathbb{N} . Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation \subseteq auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Vorbereitung 2

Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$? Begründung!

Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$? Begründung!

Gilt für $f : X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Vorbereitung 3

Eine Aussage ist bekanntlich ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann. Wir wollen als Lügner jeden Menschen bezeichnen, dessen Aussagen stets falsch sind. Nun trifft der Schiffbrüchige Moritz am Strand von Kreta einen Wanderer. Der Wanderer sagt zu Moritz: „Ich bin ein Kreter und alle Kreter sind Lügner“.

Was muss für den Wanderer gelten, wenn seine Aussage sinnvoll sein soll?

Entscheiden Sie gegebenenfalls, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Vorbereitung 4

1. Zeigen Sie, dass $\neg A \vee B \neg$ keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele verschiedene Belegungen gibt es für die Formel $A \Rightarrow B$?
3. Wie viele boolesche Funktionen f gibt es, so dass der Ausdruck $f(\mathbf{true}, B)$ für alle Belegungen stets wahr ist?

Tutoraufgabe 1

(Wiederholen Sie kurz die Begriffe und Lösungen zu Vorbereitungsaufgabe 1.)

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) \mid y = x + 5\}$. Geben Sie R^* an!
3. Sei $M = [3]$. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen R über M . Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

Tutoraufgabe 2

(Wiederholen Sie kurz die Begriffe und Lösungen zu VA 2.)

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so dass $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.
2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition \circ zweier Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv (auf C), dann ist f injektiv und g surjektiv (auf C).

Tutoraufgabe 3

(Überlegen Sie anhand von VA 3, was Aussagen sind und wie man mehrere Aussagen mit Junktoren zu einer neuen Aussage zusammensetzt.)

Tante Agatha ist ermordet worden, und zwar von einem Bewohner von Dreadbury Mansion. In Dreadbury Mansion wohnen Agatha, der Butler und Charles, und niemand sonst. Ein Mörder haßt immer das Opfer und ist niemals reicher als das Opfer. Charles haßt niemanden, den Tante Agatha haßt. Agatha haßt jeden, außer den Butler. Der Butler haßt jeden, der nicht reicher als Tante Agatha ist. Der Butler haßt jeden, den Tante Agatha haßt. Niemand haßt alle. Agatha ist nicht der Butler.

Wer ermordete Tante Agatha? Begründen Sie Ihre Lösung.

Tutoraufgabe 4

(Wiederholen Sie kurz die Begriffe und Lösungen zu VA 4.)

Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (B \wedge C).$$