Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 3
27. Oktober 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 3. November 2008, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben seien $A = \{x, b, 35, x\}$, $B = \{x, b, 2, 3, \delta, x\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}$. Wir definieren $D = B \cap (A \cup C)$, $E = D \cap (A \cap B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup B)$.

1. Leiten Sie eine möglichst einfache Mengengleichung für G her, ohne die Definitionen für A, B und C zu benutzen. Geben Sie jeweils die Identitäten für Mengen an, die Sie für die Umformungen verwenden.

2. Geben Sie G extensional an.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A = \{u, v, w, x, y\}$. Wie viele Elemente besitzt diese Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathcal{P}(A)$ und der Menge aller Funktionen von A in $\{0, 1\}$?

2. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A = \{1, a, \{a, b\}, c\}$. Wie viele Elemente besitzt die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen A, B, notiert $A \times B$, versteht man die Menge aller 2-Tupel von Elementen aus A bzw. B: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$.

1. Berechnen Sie das kartesische Produkt von $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$!

2. Welche Kardinalität hat $(A \times B) \times (B \times A)$?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Über $M = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die folgenden Relationen $R_1 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ und $R_3 = \{(1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

1. Welche dieser Relationen sind reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Welche dieser Relationen sind Abbildungen auf den entsprechenden Urbildern? Begründen Sie Ihre Antworten!

2. Berechnen Sie $R_1 \circ R_2$, R_2^* und R_3^* !

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Seien x, y, z, p, q Variablenbezeichungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Wie lässt sich das Bikonditional $\Leftrightarrow$ durch einen Ausdruck in den Operatoren $\vee$ und $\neg$ darstellen?
2. Sei β eine Belegung mit $\beta(x) = 1,\ \beta(y) = 0,\ \beta(z) = 1$. Ist β passend zu dem Ausdruck $x \Leftrightarrow z$?
3. Wie viele minimale passende Belegungen gibt es zu $x \Leftrightarrow y$? Welche sind das?
4. Berechnen Sie $[x \Leftrightarrow y](\beta)$, mit obigem β !
5. Ist $x \Leftrightarrow y$ allgemeingültig? Begründung!

Vorbereitung 2

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!
3. Sei $\models F$. Zeigen Sie, dass die Formel $H \Rightarrow F$ eine Tautologie ist für alle Formeln H.

Vorbereitung 3

Zeigen Sie durch Benutzung von Äquivalenzregeln die Allgemeingültigkeit bzw. semantische Äquivalenz der folgenden Ausdrücke.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
2. $q \Rightarrow (p \vee q)$.
3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p \ \equiv\ p \Rightarrow (p \wedge q)$.
4. $q \Leftrightarrow (p \vee q) \ \equiv\ (p \vee q) \Rightarrow q$.

Vorbereitung 4

Der Modus Tollens bezeichnet eine Inferenzregel der Form

$$(\neg G \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow \neg F\,.$$

Leiten Sie den Modus Tollens aus den übrigen Inferenzregeln der Vorlesung ab.

Tutoraufgabe 1

Seien p, q, r, s Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax. Die aussagenlogischen Formeln F und G seien gegeben durch

$$F = (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s) \quad \text{und} \quad G = ((q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)) \Leftrightarrow (q \vee (r \Leftrightarrow s))\,.$$

1. Geben Sie alle zu F passenden, minimalen Belegungen als geeignet sortierte Liste B an.

2. Bestimmen Sie die Bedeutung $[F]$ von F, indem Sie B zu einer Wahrheitstabelle für $[F]$ erweitern.

3. Bestimmen Sie die Semantik von G. Zeigen Sie, dass F und G semantisch nicht äquivalent sind, d. h. $F \not\equiv G$.

Tutoraufgabe 2

Wir übernehmen die Bezeichnungen der vorausgehenden Aufgabe.

1. Zeigen Sie, dass F und $\neg F$ erfüllbare Formeln sind.

2. Zeigen Sie, dass $\neg G$ ein Widerspruch ist. Was bedeutet dies für G?

3. Zeigen Sie, dass $G \models F$ nicht gilt.

4. Sei H eine beliebige aussagenlogische Formel und x eine aussagenlogische Variable. Zeigen Sie, dass $H \Leftrightarrow ((x \Rightarrow H) \wedge (\neg x \Rightarrow H))$ allgemeingültig ist.

Tutoraufgabe 3

Benützen Sie im Folgenden die Ergebnisse von VA 3.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die sogenannte „goldene Regel“

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; q \Leftrightarrow (p \vee q)\,.$$

2. Wir beweisen nun die goldene Regel noch einmal in der allgemeingültigen Form

$$((p \wedge q) \Leftrightarrow p) \;\Leftrightarrow\; (q \Leftrightarrow (p \vee q))\,.$$

   Allerdings soll nun die Fallunterscheidung im Sinne der vorausgehenden Tutoraufgabe TA 2.4 benützt werden. Machen Sie die Fallunterscheidung durch Substitution **true** bzw. **false** für p und wenden Sie entsprechende Äquivalenzregeln zur Vereinfachung an.

Tutoraufgabe 4

Seien p, q, r, s, t beliebige Aussagen, für die die Annahmen $\neg p \wedge q$, $r \Rightarrow p$, $\neg r \Rightarrow s$ und $s \Rightarrow t$ gelten. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln die Gültigkeit der Konklusion

$$(\neg r \wedge s) \wedge t\,.$$

Protokollieren Sie die Anwendungen der Inferenzregeln.