Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 4
3. November 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 10. November 2008, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm H für die Relation „x teilt y", i. Z. $x|y$, auf der Teilmenge $M = [30] \setminus [10]$ der natürlichen Zahlen.
2. Geben Sie das Urbild der Relation H an und zeigen Sie, dass H eine injektive Abbildung des Urbilds von H in $\mathbb{N}$ darstellt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 2x + y \geq 11\}$. Wir definieren eine binäre Relation R über M, d. h. $R \subseteq M \times M$, wie folgt: $((x, y), (x', y')) \in R \;:\Leftrightarrow\; x \leq x' \wedge y \leq y'$.

1. Ist R reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Ist R eine partielle Ordnung über M? Ist R total?
2. Ein Element $x \in M$ heißt minimal bezüglich R, wenn es kein Element $y \in M$ gibt mit $y \neq x$ und $(y, x) \in R$. Wie viele minimale Elemente bezüglich R gibt es?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Scotland Yard hat drei Verdächtige für den Mord an Lady Margarete festgenommen: Mr. Schiller, Mr. Goethe und Mr. Shakespeare. Beim Verhör gibt Schiller zu Protokoll, dass Margarete mit Goethe befreundet gewesen sei und Shakespeare Margarete nicht leiden konnte. Goethe sagt aus, dass er Margarete nicht gekannt habe und am fraglichen Tag nicht in der Stadt gewesen sei. Shakespeare dagegen sagt aus, dass er Schiller und Goethe am fraglichen Tag mit Margarete zusammen gesehen habe. Wir nehmen an, dass höchstens einer der Männer der Mörder sein kann und dass Unschuldige immer die Wahrheit sagen.

1. Formalisieren Sie die relevanten Aussagen als eine Gesamtformel über die folgenden Aussagenvariablen (wir geben hier nur die Variablen für Goethe an, ergänzen Sie entsprechende Variablen für Schiller und Shakespeare):

   GF: Goethe ist Freund von Margarete
   GS: Goethe war in der Stadt
   GM: Goethe hat Margarete ermordet.

   Geben Sie die Belegungen an, die die Gesamtformel wahr machen. Begründen Sie Ihre Antwort. Leiten Sie daraus ab, wer der Mörder ist.

2. Was kann man logisch herleiten, wenn man annimmt, dass es auch mehrere, gemeinschaftliche Mörder geben kann?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen A, B, C als Wahrheits(wert)tabelle:

$$\neg((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (A \Rightarrow C)\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Mengen wollen wir dann „gleich groß“ nennen, wenn sich deren Elemente mit einer gewissen Vorschrift paarweise bijektiv zuordnen lassen. Wir übernehmen auch die plausible Vorstellung, dass eine Teilmenge B einer Menge A nicht „größer“ ist als A. Außerdem sei eine Teilmenge B von A genau dann „kleiner“ als A, wenn B und A nicht „gleich groß“ sind.

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen „gleich groß“ sind, indem Sie eine Vorschrift angeben, wie man alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nacheinander durchlaufen kann!
2. Warum läßt sich behaupten, dass die Menge $\mathbb{Q}$ nicht „größer“ sein kann als $\mathbb{N}$?

Vorbereitung 2

Begründen Sie die folgende Implikation, die für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik gilt. Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige, endliche Menge von Aussagen, und F, G seien aussagenlogische Formeln. Dann gilt

$$\mathcal{A} \vdash F \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}, G \vdash F\,.$$

Vorbereitung 3

Seien a, b, c bzw. x, y, z bzw. P, Q Konstanten bzw. Variablen bzw. 2-stellige Prädikate aus dem Vokabular der prädikatenlogischen Syntax. Gegeben sei die Struktur $S = (U, I)$ mit $U = \{1, 2, 3\}$, $I(a) = a_S = 2$, $I(y) = y_S = 1$ und $I(P) = P_S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x\ (P(x, y) \Rightarrow (\exists y\ Q(x, y)))\,.$$

1. Geben Sie für jedes Vorkommen einer Variablen in F seinen Gültigkeitsbereich an.
2. Entscheiden Sie, welche Vorkommen frei bzw. gebunden sind. Ist F eine geschlossene Formel?
3. Begründen Sie, warum die Struktur S nicht zur Formel F passt!
4. Geben Sie eine möglichst minimale Erweiterung S' der Struktur S an, so dass S' zu F passt und F wahr macht, d. h. $[F](S') = 1$.

Vorbereitung 4

Wir verändern die Formel F aus der vorausgegangenen Aufgabe wie folgt und übernehmen die übrigen Bezeichnungen.

$$G = \forall x\ (P(x, a) \Rightarrow (\exists y\ P(x, y)))\,.$$

1. Berechnen Sie [G](S)! Was können Sie daraus für die Erfüllbarkeit der Formel F schließen? Begründung!
2. Ist G eine Tautologie? Begründung!

Tutoraufgabe 1

(*Die Bearbeitung von VA 1 wird vorausgesetzt.*)
Zeigen Sie, dass die Kardinalzahl der Menge I der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 „größer" ist als die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$.
Hinweis: Stellen Sie die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch unendliche Dezimalbrüche der Form $0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n d_{n+1} \ldots$ mit $d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dar, so dass es keinen Index j gibt mit $d_i = 9$ für alle $i > j$. Nehmen Sie an, eine bijektive Abbildung c von $\mathbb{N}$ auf I zu besitzen. Konstruieren Sie nun einen Dezimalbruch für eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die nicht im Bild von c enthalten sein kann.

Tutoraufgabe 2

(*Die Bearbeitung von VA 2 wird vorausgesetzt.*)
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige, endliche Mengen von Aussagen, und F, G, H seien aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie für den Herleitungskalkül der Aussagenlogik die folgende Implikation.

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \text{und} \quad \mathcal{B}, F \vdash G \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash G\,.$$

Tutoraufgabe 3

(*Die Bearbeitung von VA 3 und VA 4 wird vorausgesetzt.*)
Definieren Sie eine Struktur S, in der gleichzeitig die beiden folgenden Formeln wahr sind.

$$\neg \exists x\ (\forall y\ P(x, y)) \quad \text{und} \quad \forall y\ (\exists x\ P(x, y))\,.$$

Tutoraufgabe 4

(*Die Bearbeitung von VA 3 und VA 4 wird vorausgesetzt.*)

1. Widerlegen Sie: $\exists x\ \forall y\ Q(x, y) \ \equiv\ \forall y\ \exists x\ Q(x, y)\,.$
2. Geben Sie eine zu $\neg \exists x\ \forall y\ P(x, y)$ äquivalente Formel an, so dass der Verneinungsoperator ($\neg$) nicht links neben einem logischen Quantor vorkommt.