Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 5
10. November 2008

# Diskrete Strukturen

*Abgabetermin: 17. November 2008, 18 Uhr in die* **DS Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\diamond$ ein 3-stelliger logischer Operator mit einer Wahrheitsfunktion $\beta : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ als Bedeutung.

1. Wir nehmen $\beta(1,0,1) = 1$ an. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung
$$\diamond(x,y,z) \;\equiv\; (x \wedge \neg y \wedge z) \;\vee\; (\,\neg(x \wedge \neg y \wedge z) \wedge \diamond(x,y,z)\,)\,. \tag{1}$$

2. Wir nehmen $\beta(1,0,1) = 1$ und $\beta(1,1,0) = 1$ an. Außerdem habe $\beta$ für alle sonstigen Belegungen der 3 Argumente den Wert 0.

   Geben Sie eine zur Äquivalenz (1) analoge Gleichung für $\diamond$ an und entwickeln Sie daraus für $\diamond$ einen äquivalenten disjunktiven Ausdruck über den logischen Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Erstellen Sie für alle 16 2-stelligen Wahrheitsfunktionen die Wahrheitswerttabellen auf, indem Sie die folgende Tabelle so vervollständigen, dass sich die jeweilige Wertespalte für eine Funktion $\phi_i$ als Dualzahldarstellung des Sortierungsindex $i$ verstehen läßt.

| $x$ | $y$ | $\phi_0$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $\phi_5$ | $\phi_6$ | $\phi_7$ | $\phi_8$ | $\phi_9$ | $\phi_{10}$ | $\phi_{11}$ | $\phi_{12}$ | $\phi_{13}$ | $\phi_{14}$ | $\phi_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 |

Stellen Sie $\phi_{10}$ durch einen äquivalenten Ausdruck über den Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ dar.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Distributivität
$$p \Rightarrow (q \vee r) \;\equiv\; (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

1. durch Verwendung von Wahrheitswerttabellen!

2. durch Fallunterscheidung, indem Sie gesondert $p = \mathsf{true}$ bzw. $p = \mathsf{false}$ betrachten und jeweils mit Äquivalenzregeln vereinfachen!

Berechnen Sie für alle passenden minimalen Belegungen $\beta$ den Wert des folgenden Ausdrucks.
$$[((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \;\Leftrightarrow\; (p \Rightarrow (q \vee r))](\beta)\,.$$

## **Hausaufgabe 4** (5 Punkte)

Wir untersuchen die Inferenzregel der inversen Resolution.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die Allgemeingültigkeit von

$$(p \wedge q) \Rightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))\,.$$

2. Widerlegen Sie die Allgemeingültigkeit der Umkehrung

$$((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \Rightarrow (p \wedge q)\,.$$

***Hinweis:*** *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

## Vorbereitung 1

Es wird erzählt, dass in einem kleinen Dorf in Bayern ein alter Barbier lebt, der genau alle diejenigen Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Formalisieren Sie den Sachverhalt prädikatenlogisch und weisen Sie nach, dass der Barbier nicht existieren kann, die Erzählung also eine Lüge enthält!

## Vorbereitung 2

Wir definieren ein Universum $U$ als Vereinigung der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und der Menge $F$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Seien $N^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung $x_S \in \mathbb{N}$, $P^1(x)$ das Prädikat mit der Bedeutung, dass $x_S$ eine positive reelle Zahl ist, d. h. $x_S \in \mathbb{R}, x_S > 0$ gilt. Sei $F^1(f)$ das Prädikat mit $f_S \in F$ und schließlich $V^4(f,g,n,\epsilon)$ das Prädikat mit der Bedeutung $|f_S(n_S)| \leq \epsilon_S \cdot g_S(n_S)$ mit $n_S \in \mathbb{N}$, $\epsilon_S \in P^1_S$ und $f_S, g_S \in F$.

Seien $f_S$ und $g_S$ Elemente von $F$, so dass $f_S(n) = 2$ und $g_S(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1. Für welche $n_S \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_S \in \mathbb{R}$ gilt $V^4(f,g,n,\epsilon)$? Geben Sie die Lösung als Menge von Paaren $(n_S, \epsilon_S)$ an.
2. Sei $G^2(n, n_0)$ das Prädikat, das genau dann wahr ist, wenn $N^1(n) \wedge N^1(n_0) \wedge (n \geq n_0)$ gilt. Für welche $n_0$ gilt die Formel $\forall n\ (G^2(n,n_0) \Rightarrow V^4(f,g,n,\epsilon))$ ?

## Vorbereitung 3

Seien $P$ und $Q$ 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls. Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln $\exists x\ P(x)$ und $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ . Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)\,.$$

## Tutoraufgabe 1

Im Folgenden betrachten wir Relationen $R \subseteq M \times M$ über einer Menge $M$. Sei $\trianglelefteq$ ein 2-stelliges Prädikatsymbol. Zur Vereinfachung der Schreibweise für $\trianglelefteq(x, y)$ wollen wir $x \trianglelefteq y$ schreiben. Wir sagen, dass $\trianglelefteq$ die *min*-Eigenschaft besitzt, falls gilt

$$\forall x \;\; \exists y \;\; \forall z \;\; (\, z \trianglelefteq x \Rightarrow y \trianglelefteq z \,)\,.$$

1. Zeigen Sie mit einer möglichst einfachen, passenden Struktur, dass die Formel erfüllbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die totale Ordnungsrelation $\leq$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die *min*-Eigenschaft besitzt.

3. Geben Sie ein Beispiel einer nicht totalen partiellen Ordnungsrelation an, die die *min*-Eigenschaft besitzt.

## Tutoraufgabe 2

(*Die Bearbeitung von VA 2 wird vorausgesetzt.*)
Seien $M$ und $P$ prädikatenlogische Formeln. Wir verwenden häufig die abkürzenden Schreibweisen

$$\forall x, M\colon P \quad \text{für} \quad \forall x\, (M \Rightarrow P) \qquad \text{und} \qquad \exists x, M\colon P \quad \text{für} \quad \exists x\, (M \wedge P)\,.$$

1. Beweisen Sie die entsprechenden DeMorgan'schen Gesetze

$$\neg(\forall x, M\colon\, P) \;\equiv\; \exists x, M\colon \neg P \qquad \text{bzw.} \qquad \neg(\exists x, M\colon\, P) \;\equiv\; \forall x, M\colon \neg P\,.$$

2. Wir nehmen Individuenvariablen $f, g, \epsilon, n, n_0$ sowie Prädikate $P^1, N^1, G^2, V^4$ und $o^2$ mit den angegebenen Stelligkeiten an. Sei

$$o^2(f, g) \;\equiv\; \forall \epsilon, P^1(\epsilon)\colon\; \exists n_0, N^1(n_0)\colon\; \forall n, G^2(n, n_0)\colon\; V^4(f, g, n, \epsilon)\,.$$

Zeigen Sie

$$\neg o^2(f, g) \;\equiv\; \exists \epsilon, P^1(\epsilon)\colon\; \forall n_0, N^1(n_0)\colon\; \exists n, G^2(n, n_0)\colon\; \neg V^4(f, g, n, \epsilon)\,.$$

*Bemerkung*: Diese Aufgabe wird uns helfen, die komplexen Definitionen zum Wachstum von Funktionen zu analysieren.

## Tutoraufgabe 3

(*Die Bearbeitung von VA 3 wird vorausgesetzt.*)
Seien $P$ und $Q$ 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.

1. Die Menge $\mathcal{A}$ bestehe aus den beiden Formeln $\forall x\, P(x)$ und $\exists x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)\,.$$

2. Die Menge $\mathcal{A}$ bestehe aus den beiden Formeln $\exists x\, P(x)$ und $\exists x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Warum kann mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz $\mathcal{A} \vdash \exists x\, Q(x)$ nicht gefolgert werden?