Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 7
24. November 2008

# Diskrete Strukturen

*Abgabetermin: 1. Dezember 2008, 18 Uhr in die* **DS Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $f$ und $g$ Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, die durch die Gleichungen $f(n) = 10\sqrt{n}$ und $g(n) = n$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass

$$\forall c, c \in \mathbb{R}, c > 0 : \; \exists n_0, n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |f(n)| \leq c \cdot g(n) \qquad (*)$$

gilt, indem Sie für beliebiges $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ konstruieren, so dass die Formel $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |f(n)| \leq c \cdot g(n)$ erfüllt ist. Die Gültigkeit dieser Formel ist für das konstruierte $n_0$ nachzuweisen.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die prädikatenlogische Verneinung der Aussage $*$ der vorausgehenden Hausaufgabe äquivalent ist zu

$$\exists c, c \in \mathbb{R}, c > 0 : \; \forall n_0, n_0 \in \mathbb{N} : \; \exists n, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |f(n)| > c \cdot g(n)\,. \qquad (**)$$

2. Zeigen Sie, dass für die Funktionen $f(n) = 2n^2$ und $g(n) = n^2$ die Aussage $**$ gilt.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\lhd$ ein 2-stelliges Prädikatsymbol. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir $x \lhd y$ für $\lhd(x, y)$ schreiben und $x \neq y$ für $\neg(x = y)$. Wir sagen, dass $\lhd$ dicht ist, falls gilt

$$\forall x \, \forall y \;\; (x \lhd y \Rightarrow \exists z \;\; ((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge (x \lhd z) \wedge (z \lhd y)))\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Formel mit nicht leerer Relation $\lhd(x, y)$ erfüllbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die „kleiner“-Relation $<$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nicht dicht ist.

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $P$ und $Q$ 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls. Die Menge $\mathcal{A}$ bestehe aus den beiden Formeln $\forall x \, P(x)$ und $\forall x \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ . Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \forall x \, Q(x)\,.$$

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

## Vorbereitung 1

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über $M$ gibt es?
2. Wie viele reflexive Relationen über $M$ gibt es?
3. Sei $A$ eine $n$-elementige Menge und es sei $B$ eine $m$-elementige Teilmenge von $A$. Wie viele Teilmengen $C$ von $A$ gibt es, die $B$ enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}$ an und begründen Sie diese Formel.

Begründen Sie Ihre Antworten.

## Vorbereitung 2

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über $M$ auf!
2. Wie viele Partitionen gibt es über $M$?
3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?
4. Wie viele surjektive Abbildungen $f$ von $M$ auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?
5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?
6. Geben Sie alle Permutationen von $M$ an!

Begründen Sie Ihre Antworten.

## Vorbereitung 3

Wie viele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe`)

## Vorbereitung 4

Seien $A$ und $B$ beliebige Mengen und $\mathcal{P}(A)$ bzw. $\mathcal{P}(B)$ die entsprechenden Potenzmengen.

1. Man zeige $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .
2. Geben Sie ein Beipiel für $A$ und $B$ an, so dass $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ .

## Tutoraufgabe 1

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele der Relationen sind nicht Funktionen mit Definitionsbereich $M$?
2. Wie viele der Relationen sind totale Ordnungen von $M$?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen bijektiven Abbildungen $f : M \to M$, totalen Ordnungen und Permutationen von $M$?

## Tutoraufgabe 2

Die Menge der injektiven Abbildungen einer Menge $M$ in eine Menge $N$ bezeichnen wir mit $Inj(M, N)$. Seien $M$ und $N$ endliche Mengen mit $|M| \leq |N|$.

1. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|Inj(M, N)| \;=\; |N| \cdot |Inj(M\setminus\{x\}, N\setminus\{y\})|\,.$$

2. Die Anzahl der Elemente in $M$ bzw. $N$ sei $m$ bzw. $n$. Zeigen Sie mit geeigneter vollständiger Induktion, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von $M$ nach $N$ gegeben ist durch

$$n^{\underline{m}} := \prod_{i=1}^{m} (n - i + 1).$$

*Hinweis:* Für $m = 0$ besitzt das ”leere” Produkt definitionsgemäß den Wert 1.

## Tutoraufgabe 3

1. 5 Dresdener die alle im April Geburtstag haben, sitzen beim Kartenspiel zusammen. Die Geburtstage der 5 Dresdener bilden eine Multimenge, die wir „Geburtstagsmenge“ nennen wollen. Wie viele Geburtstagsmengen gibt es?
2. Wenn Sie darauf wetten würden, dass 2 von den 5 Kartenspielern am gleichen Tag Geburtstag haben, wäre dann die Gewinnschance größer als $\frac{1}{2}$ ? Begründung!

## Tutoraufgabe 4

Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
Berechnen Sie $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)|$ !
*Hinweis*: Beachten Sie, dass die angegebenen Mengen nicht disjunkt sind.