Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 8
1. Dezember 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 8. Dezember 2008, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i = \frac{1 + (-1)^{n+1}(2n+1)}{4} \, .$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die Folge der Lukaszahlen $(l_0, l_1, \ldots)$ ist definiert durch

$$l_0 = 2 \, , \quad l_1 = 1 \, , \quad l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \, .$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \, .$$

Hinweis: Es gilt $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$ oder $f(n) \in O(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung. Benutzen Sie gfs. die Monotonieeigenschaften der Funktionen ohne Beweis.

$$f_1(n) = 2^n \, , \qquad f_2(n) = \sqrt{100n} \, ,$$
$$f_3(n) = n^{\ln \ln n} \, , \qquad f_4(n) = (\log n^2)^2 \, .$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

$$2^{100} \cdot n^2 \in O(n^2) \, , \qquad e^n \in \omega(2^n) \, .$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 6n\}$ mit $|A| = 2n + 1$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in A$ gibt, die durch 2 oder durch 3 teilbar ist.

Vorbereitung 2

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat sei eine Zahl zwischen 1 und 7 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   KRIMINALISIERUNG

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Vorbereitung 3

Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten von $x^3y^2z^2$ und x^2z^3 in $(x + xy + z)^5$.

Vorbereitung 4

Die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ sind definiert als die Anzahl der verschiedenen Partitionen einer n-elementigen Menge in k nicht leere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Begründen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

   (a) $S_{0,0} = 1$, (b) $S_{n,n} = 1$, (c) $S_{n,k} = 0$, falls $k > n$, (d) $S_{n,0} = 0$, falls $n > 0$.

2. Bekanntlich gilt die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die Rekursion bis $n + k = 8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks dar.

Tutoraufgabe 1

1. Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\} \subset \mathbb{N}$ mit $|A| = n + 1$. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, deren Summe $2n + 1$ beträgt.

2. Zeigen Sie: In einer Gruppe von 10 Personen gibt es entweder 3, die sich gegenseitig kennen, oder 4, die sich gegenseitig nicht kennen.

   Bestimmen Sie die Ramsey-Zahl $R(3, 4)$.

Tutoraufgabe 2

1. Wie viele verschiedene Ergebnisse ("Wurfkonstellationen") kann es geben, wenn man mit 4 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Zwei Würfel sind blau und zwei Würfel sind grün.

2. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ABRAKADABRA* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das A genau fünfmal vorkommen.)

Tutoraufgabe 3

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Man zeige

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Sei M eine Menge mit n Elementen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wie viele Multiteilmengen von M mit höchstens k Elementen gibt es, wenn man $n = 6$ und $k = 3$ annimmt. Leiten Sie zunächst eine Formel ab für beliebiges n und k.

3. Bestimmen Sie den Koeffizienten von $t^4 x y^3 z$ in $(x + y + z + t)^9$.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

Tutoraufgabe 4

(*Die Bearbeitung der VA 4 wird vorausgesetzt.*)

Wir betrachten die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, d. h. die Anzahl verschiedener Partitionen einer n-elementigen Menge in k nicht leere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \geq 1$: $\quad S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

2. Zeigen Sie durch direkte kombinatorische Überlegungen (d. h. ohne vollständige Induktion) für alle $n \geq 1$: $\quad S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

3. Seien P bzw. Q eine 5-elementige bzw. eine 3-elementige Menge. Wie viele surjektive Abbildungen von P auf Q gibt es?