Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2008/09
Übungsblatt 9
8. Dezember 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 15. Dezember 2008, 18 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 6n-5\}$ mit $|A| = 2n$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in A$ gibt, die durch 2 oder durch 3 teilbar ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen n mit $n \leq 1000$, die durch 5, 7 oder 13 teilbar sind.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $m > 0$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq (M \times M) \times M$.

1. Wie viele der Relationen sind nicht Verknüpfungen (Operationen) über M?
2. Wie viele der Relationen sind surjektive Funktionen über dem Definitionsbereich $M \times M$?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 3 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

2. Begründen Sie: Es gibt mindestens 5^{n-1} Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus dem Alphabet $\{a, b, c, d, |\}$, die eine ungerade Anzahl von Zeichen '$|$' enthalten.

   Prüfen Sie zunächst den Fall $n = 1$.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.*

Vorbereitung 1

3 Geschwister treten gemeinsam ein Erbe an. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, das Erbe aufzuteilen?

1. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und es ist nicht egal, wer wie viele bekommt.
2. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und sie wollen nur wissen, wie viele Möglichkeiten der Aufteilung in 3 nichtleere Mengen es gibt (ohne Berücksichtigung, wer genau welche Menge bekommt).
3. Sie erben 6 unterschiedliche Goldmünzen und davon soll jeder genau 2 bekommen.

Vorbereitung 2

Eine Bankreihe in einem Hörsaal hat n nummerierte Plätze. Allerdings dürfen in der Klausur Studenten nicht direkt nebeneinander sitzen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Plätze in einer Reihe so zu besetzen, dass in der Reihe k Studenten sitzen? Nehmen Sie dabei an, dass es nicht egal ist, welcher Student an welchem Platz sitzt.

Vorbereitung 3

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, $2n + 1$ ($n > 1$) ununterscheidbare Bälle in drei verschiedene Boxen (z. B. eine rote, eine grüne und eine blaue Box) zu verteilen, wenn in einer Box maximal $n - 1$ Bälle liegen dürfen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Vorbereitung 4

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Tutoraufgabe 1

Die Zählung der Möglichkeiten, eine Menge in $k \in \mathbb{N}_0$ Klassen zu partitionieren, hängt davon ab, ob die in der Menge enthaltenen Elemente unterscheidbar sind. Wir betrachten Mengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$ nicht unterscheidbaren Elementen. Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen von M in k Klassen.

1. Bestimmen Sie $P_{n,0}$, $P_{n,k}$ und $P_{n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k > n$!
2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $\quad P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten k-Zahlpartitionen und den o. g. Partitionen von Mengen mit nicht unterscheidbaren Elementen.
   Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe, n unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, und der Aufgabe, n nicht unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen.

Tutoraufgabe 2

1. 4 Studenten essen 12 Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen.
   (a) Sie essen 12 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind aber voneinander unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wieviele bekommt).
   (b) Sie essen 12 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind nicht unterscheidbar, und jeder isst mindestens eine Tafel.
   (c) Sie essen 12 unterscheidbare Tafeln und es soll jeder Student genau 3 Tafeln bekommen.
2. Die Quersumme der dekadischen Darstellung einer natürlichen Zahl ist die Summe der Ziffern der Darstellung zur Basis 10, z. B. hat 5404 die Quersumme 13. Wieviele Zahlen zwischen 0 und 9999 mit Quersumme 13 gibt es?

Tutoraufgabe 3

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechnern rayhalle1, rayhalle2 bis rayhalle m ein, um ihre Mails zu lesen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird,

1. *welcher* Student auf *welchem* Rechner eingeloggt ist,
2. *wie viele* Studenten auf *welchem* Rechner eingeloggt sind,
3. *welche* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,
4. *wie viele* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind?

Was ändert sich jeweils, wenn auf jedem Rechner

- höchstens
- mindestens
- genau

ein Student eingeloggt ist.