
Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Abgabetermin: 09.06.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Flussnetzwerk $G = (V, E, c, s, t)$. Wir erweitern das Netzwerk G , indem wir jedem Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ eine *Knotenkapazität* $cap(v)$ zuordnen. Für einen zulässigen Fluss soll für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ neben der Flusserhaltung auch gelten, dass die Summe der eingehenden bzw. ausgehenden Flüsse den Wert $cap(v)$ nicht überschreitet.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der maximale Flüsse in Flussnetzwerken mit Knotenkapazitäten (und Kantenkapazitäten) berechnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Gastwirt benötigt an N aufeinander folgenden Tagen (r_1, r_2, \dots, r_N) Servietten. Er hat drei Optionen:

- Kaufe Servietten zum Stückpreis p .
- Reinige Servietten in der Schnellreinigung. Dauer m Tage, Stückpreis f .
- Reinige Servietten in der normalen Reinigung. Dauer n Tage, Stückpreis s .

Dabei ist $n > m$ und $s < f$. Jeden Morgen muss er entscheiden, wieviele Servietten er abends in die Schnellreinigung gibt, wieviele er in die normale Reinigung gibt, und wieviele er behält. Jeden Morgen bekommt er die frisch gewaschenen Servietten von der Reinigung und kauft gegebenenfalls neue.

- Formulieren Sie das Problem als ein Zirkulationsproblem. Erklären Sie die Bedeutung der Knoten und Kanten. Zeigen Sie insbesondere, dass es immer eine zulässige Zirkulation gibt.
- Geben Sie eine optimale Lösung für das Problem mit $N = 3$, $r = (3, 2, 4)$, $m = 1$ (das heißt, Servietten vom Vorabend sind zum nächsten Morgen gereinigt), $n = 2$, $p = 10$, $f = 6$ und $s = 3$ an.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

In einer Stadt verspricht man sich eine Beschleunigung des Verkehrsflusses, wenn man aus den bisher in beiden Fahrtrichtungen benutzbaren, oftmals engen Straßen Einbahnstraßen macht. Danach soll es natürlich noch möglich sein, von jedem Ort an jeden anderen zu gelangen.

Zeigen Sie, dass es zu einem gegebenen Netz von Straßen, die in beiden Richtungen befahrbar sind, genau dann ein solches Einbahnstraßennetz gibt, wenn das gegebene Netz zusammenhängend ist und keine Brücke enthält.

Hinweis: Eine Kante $e \in E$ eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls nach dem Entfernen von e der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt.