WS 2009/10

Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

19. Januar 2010

ZÜ XI VA1 bis VA4, Blatt 11

1. Blatt 11, VA 1

Wir betrachten für Graphen $G = (V, E)$
die erweiterte Form des generischen Suchalgorithmus (Vorl.)
in der für jeden besuchten Knoten v

dessen Vorgänger	$pred[v]$,
die Suchnummer	$n[v]$
und die Suchtiefe	$d[v]$

bestimmt werden.

Erweiterte Form des generischen Suchalgorithmus (Vorl.):

Initialisierung;

while die Worklist nicht leer ist:

  wähle einen Knoten v aus der Worklist;

  falls die Menge der unbesuchten Nachbarn von v nicht leer ist:
    wähle einen unbesuchten Nachbarn u von v;
    (mache Arbeitsschritte)
    markiere u als besucht;
    trage u in die Worklist ein.

  andernfalls

    entferne v aus der Worklist.

Bei der Initialisierung werden der Startknoten s (Wurzel) in die Worklist eingetragen und Anfangswerte durch

$$\mathsf{n} \leftarrow 1;\ \mathsf{n}[s] \leftarrow 1;\ \mathsf{d}[s] \leftarrow 0;$$

definiert.

Die Auswahlstrategie für den Knoten v bestimmt u. A. Breitensuche und Tiefensuche (oder eine Mischform).

Die Auswahlstrategie für den Knoten u ist beliebig und wird nicht spezifiziert.

Die erweiterte Form des Suchalgorithmus erhält man, indem man die Arbeitsschritte wie folgt definiert.

$$\mathsf{n} \leftarrow \mathsf{n}{+}1;\ \ \mathsf{n}[u] \leftarrow \mathsf{n};\ \ \mathsf{d}[u] \leftarrow \mathsf{d}[v]{+}1;\ \ \ \mathsf{pred}[u] \leftarrow v\,.$$

1. Begründen Sie, warum bei Ausführung des Suchalgorithmus die Suchtiefe für einen Knoten nie überschrieben wird.

Lösung:

Die Berechnung der Suchtiefe wie auch der Suchnummer und des Vorgängers eines Knotens u erfolgt genau dann, wenn der Knoten seine Markierung als „besucht“ erhält.

Diese Markierung kann nicht überschrieben werden, weil sie für u nur ein einziges Mal stattfindet, denn sie erfolgt

Erstens: unter der Bedingung, dass u noch nicht besucht wurde.

Zweitens: wird diese Markierung nie entfernt.

2. Bei welchen Auswahlstrategien von Elementen v aus der „Worklist W“ besteht W stets aus allen Knoten mit Suchnummern aus einem Abschnitt $[m, n]$, wobei $[m, n] = [n] \setminus [m-1]$?

Lösung:

Die Suchnummern definieren eine Reihenfolge, in denen die Knoten erstmalig (und gleichzeitig letztmalig) der Worklist hinzugefügt werden. Die geforderte Bedingung bedeutet, dass die Worklist stets die Suchnummern lückenlos enthalten muss.

Um die Bedingung aufrechtzuerhalten, darf also stets nur entweder das Element mit der kleinsten oder der größten Nummer der in der Liste vorhandenen Suchnummern entfernt werden.

Dem würde eine Mischung aus Breitensuche und Tiefensuche entsprechen.

3. Ist das Ergebnis der Suchtiefe eines Knotens v
bei Anwendung des generischen Suchalgorithmus
mit den Strategieen
der Breitensuche einerseits oder der Tiefensuche andererseits
mit gleichem Startknoten das Gleiche?

   Begründen Sie Ihre Antwort ggf. mit einem Beispiel!

Antwort: Nein!

Begründung:

Das Beispiel des Kreises C_5 auf den Knoten $[5]$ mit Startknoten $s = 1$ liefert:

Bei Breitensuche $d(4) = 2$.

Mit Tiefensuche kommt es zunächst auf
die Reihenfolge der besuchten Nachbarknoten an.

Wenn wir so vorgehen, dass wir
$n(1) = 1$, $n(2) = 2$, $n(3) = 3$ und $n(4) = 4$ erhalten,
dann ergibt sich $d(4) = 3$.

4. Der Suchalgorithmus werde mit der Strategie der Breitensuche durchgeführt. Nehmen Sie an, dass u vor v aus der Worklist entfernt wird.

   Geben Sie ein Beispiel an, in dem $d[u] = d[v]$ gilt!

Antwort:

Alle Knoten, die Nachbar des Startknotens s sind, bekommen bei Breitensuche die gleiche Suchtiefe.

Offensichtlich wird von mehreren Nachbarknoten irgendeiner der Knoten vor einem bestimmten anderen Knoten aus der Worklist entfernt,

weil zu einem bestimmten Zeitpunkt immer nur ein einziger Knoten entfernt wird.

2. Blatt 11, VA 2

$G = (V, E)$ sei ein einfacher, zusammenhängender Graph.

Die Länge eines Weges w in einem Graphen ist definiert als die Anzahl der Vorkommen von Kanten in w.

Der Abstand $d(u, v)$ zwischen Knoten u und v
ist definiert als das Minimum aller Längen von Wegen
mit Anfangsknoten u und Endknoten v.

(Da von u nach u der Pfad (u) der Länge 0 führt, gilt $d(u, u) = 0$.)

1. Zeigen Sie, dass es stets einen Pfad der Länge $d(u, v)$ gibt mit Anfangsknoten u und Endknoten v.

Lösung:

Ein Weg $w = x_1, x_2, \ldots, x_n$, der kein Pfad ist, enthält eine Knotenwiederholung, d. h. x_i und x_j mit $i < j$ und $x_i = x_j$.

Entfernt man die Knoten $x_{i+1}, \ldots, x_j$ aus w,
dann erhält man einen Weg w',
der x_1 und x_n verbindet und kürzer ist als w, d. h. $|w'| < |w|$.

Daraus folgt, dass jeder Weg, der u und v verbindet und die Länge $d(u, v)$ hat, bereits ein Pfad ist.

Da der Abstand $d(u, v)$ nach Definition das Minimum über einer endlichen Menge von Längen ist, folgt für alle u, v
die Existenz eines Weges w von u nach v mit Länge $d(u, v)$.

Also gibt es auch einen Pfad von u nach v mit Länge $d(u, v)$.

2. Zeigen Sie für alle $u, v, w \in V$
die Symmetrie $d(u,v) = d(v,u)$ und
die Dreiecksungleichung $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Lösung:

Die Symmetrie folgt aus der Tatsche, dass man in „ungerichteten“ Graphen aus jedem Weg $w = x_1, x_2, \ldots, x_n$ von x_1 nach x_n einen Weg w' von x_n nach x_1 erhalten kann: $w' = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Beweis der Dreiecksungleichung:

Seien $p_{u,v} = u, s_1, s_2, \ldots, s_m, v$ ein Pfad von u nach v und $q_{v,w} = v, t_1, t_2, \ldots, t_n, w$ ein Pfad von v nach w mit Länge $d(u,v)$ bzw. mit Länge $d(v,w)$.

Dann ist $r_{u,w} = u, s_1, s_2, \ldots, s_m, v, t_1, t_2, \ldots, t_n, w$ ein Weg von u nach w der Länge $d(u,v) + d(v,w)\,.$

Da $d(u,w)$ die kleinste Länge solcher Wege ist, muss gelten

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)\,.$$

3. Blatt 11, VA 3

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z.

$$a \equiv b \pmod{m},$$

falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m (additiv) unterscheiden, d. h.,
falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $\quad a = b + k \cdot m \quad$ gilt.

Es gilt

$$b = a \bmod m \quad \Longleftrightarrow \quad [0 \leq b < m \ \text{ und } \ a \equiv b \pmod{m}].$$

Diese Äquivalenz kann man der
Definition der Operation mod zugrunde legen.

In enger Beziehung zur mod-Operation steht
die ganzzahlige Division $a \operatorname{div} m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.
Es gilt

$$a = (a \operatorname{div} m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

1. Berechnen Sie:

   (i) $5 \operatorname{div} 4$, (ii) $(-5) \operatorname{div} 4$, (iii) $(-x) \operatorname{div} 1$.

Lösung:

Wir führen div mithilfe der angegebenen Gleichung auf mod zurück.

(i) Seien $a = 5$ und $m = 4$. Dann gilt

$$(5 \operatorname{div} 4) \cdot 4 \;=\; 5 - (5 \operatorname{mod} 4) \;=\; 5 - 1 \;=\; 4\,.$$

Es folgt

$$5 \operatorname{div} 4 \;=\; 1\,.$$

(ii) Seien $a = -5$ und $m = 4$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((-5)\,\mathrm{div}\,4)\cdot 4 &= -5 - ((-5)\bmod 4) \\ &= (-5 - ((-5+8)\bmod 4)) \\ &= (-5-3) \;=\; -8\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(-5)\,\mathrm{div}\,4 = -2\,.$$

(iii) Seien $a = -x$ und $m = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((-x) \operatorname{div} 1) \cdot 1 &= -x - ((-x) \bmod 1) \\ &= -x - 0 = -x\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(-x) \operatorname{div} 1 = -x\,.$$

2. Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a \pm m) \operatorname{div} m = a \operatorname{div} m \ \pm 1\,.$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
((a \pm m) \operatorname{div} m) \cdot m &= (a \pm m) - (a \pm m) \bmod m \\
&= (a \pm m) - a \bmod m \\
&= (a - a \bmod m) \pm m \\
&= (a \operatorname{div} m)m \pm m\,.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$(a \pm m) \operatorname{div} m = a \operatorname{div} m \pm 1\,.$$

3. Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a \cdot n) \ \mathrm{div}\ (m \cdot n) = a \,\mathrm{div}\, m\,.$$

Lösung:

Wir rechnen

$$\begin{aligned} ((an)\,\mathrm{div}(mn)) \cdot mn &= (an) - (an)\,\mathrm{mod}(mn) \\ &= n \cdot (a - a \,\mathrm{mod}\, m) \\ &= n \cdot ((a \,\mathrm{div}\, m) \cdot m)\,. \end{aligned}$$

Division durch mn liefert die zu beweisende Gleichung.

Wir müssen aber noch $(na)\,\mathrm{mod}(nm) = n(a \,\mathrm{mod}\, m)$ beweisen.

Wir zeigen $(na) \bmod (nm) = n(a \bmod m)$.

Seien $b = (na) \bmod (nm)$ und $c = (a \bmod m)$.

Dann gelten für passende ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$b = na - knm \qquad \text{und} \qquad c = a - lm\,.$$

Außerdem gelten die Ungleichungen $0 \leq b < nm$ und $0 \leq c < m$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} b - nc &= (na - knm) - n(a - lm) \\ &= (l - k)nm\,. \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen für b und c folgt aber
$-mn < b - nc < nm$, d. h. $-mn < (l - k)nm < nm$.
Daraus folgt $l - k = 0$, mithin die zu beweisende Gleichung $b = nc$.

4. Blatt 11, VA 4

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \bmod m \pmod{m}\,, && (1)\\ (a+b) \bmod m &= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,, && (2)\\ (a \cdot b) \bmod m &= [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. && (3) \end{aligned}$$

Lösung

(1):

Die Kongruenz modulo m ist definiert durch

$$x \equiv y \pmod{b} \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,x = y + k \cdot b\,]\,.$$

Nach Definition von $(a \bmod b)$ gilt für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$

$$a \bmod b = a + k \cdot b\,, \quad \text{d. h.} \quad a = a \bmod b + k' \cdot b\,,$$

mithin

$$a \equiv a \bmod b \pmod{b}\,.$$

(2):

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} x &:= (a+b) \bmod m\,, \\ y &:= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,. \end{aligned}$$

Es gilt $0 \leq x, y < m$ und

$$\begin{aligned} x &= a + b + k_x \cdot m\,, \\ y &= (a \bmod m) + (b \bmod m) + k_y \cdot m\,, \\ (a \bmod m) &= a + k_a \cdot m\,, \\ (b \bmod m) &= b + k_b \cdot m \end{aligned}$$

für gewisse $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$.

Wir zeigen $x = y$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
y &= a + k_a \cdot m + b + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\
&= x - k_x \cdot m + k_a \cdot m + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\
&= x + (k_a + k_b + k_y - k_x) \cdot m \\
&= x + k \cdot m\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\quad 0 \le x, y < m \quad$ folgt $\; x = y$.

(3):

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} x &:= (a \cdot b) \bmod m\,, \\ y &:= [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. \end{aligned}$$

Es gilt $0 \leq x, y < m$ und

$$\begin{aligned} x &= a \cdot b + k_x \cdot m\,, \\ y &= (a \bmod m) \cdot (b \bmod m) + k_y \cdot m\,, \\ (a \bmod m) &= a + k_a \cdot m\,, \\ (b \bmod m) &= b + k_b \cdot m \end{aligned}$$

für gewisse $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$.

Wir zeigen $x = y$ wie folgt:

$$\begin{aligned} y &= (a + k_a \cdot m) \cdot (b + k_b \cdot m) + k_y \cdot m \\ &= a \cdot b + a \cdot k_b \cdot m + b \cdot k_a \cdot m + k_a k_b m^2 \\ &= x - k_x \cdot m + k' \cdot m \\ &= x + k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Wegen $\quad 0 \le x, y < m \quad$ folgt $\; x = y$.