WS 2009/10

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2009WS/ds/uebung/

28. Oktober 2009

ZÜ II Vorbereitung TÜ Blatt 2

1. VA 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche $\leq$-Ordnung der Zahlen $[6]$. Wie ergibt sich die $\leq$-Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?

Erklärung:

Ein **Hasse-Diagramm** ist eine graphische Darstellung einer binären Relation R. Paare (a,b) werden als Pfeile oder als Kanten von oben nach unten zwischen Punkten dargestellt. Dabei ist das wichtigste darstellerische Prinzip, dass all jenes nicht gezeichnet wird, was sich durch die Eigenschaften der darzustellenden Relation von selbst versteht. Abstrakt betrachtet ist aber das Hasse-Diagramm selbst wieder eine Relation H, die in einem definierten Verhältnis zu R steht.

$\leq$ als Graph

ZÜ II Vorbereitung TÜ Blatt 2

1. VA 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche $\leq$-Ordnung der Zahlen $[6]$. Wie ergibt sich die $\leq$-Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?

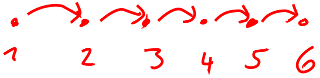
   Erklärung:
   Ein **Hasse-Diagramm** ist eine graphische Darstellung einer binären Relation R. Paare (a, b) werden als Pfeile oder als Kanten von oben nach unten zwischen Punkten dargestellt. Dabei ist das wichtigste darstellerische Prinzip, dass all jenes nicht gezeichnet wird, was sich durch die Eigenschaften der darzustellenden Relation von selbst versteht. Abstrakt betrachtet ist aber das Hasse-Diagramm selbst wieder eine Relation H, die in einem definierten Verhältnis zu R steht.

- Für ein Hasse-Diagramm H einer transitiven und reflexiven Relation R gilt stets $H \subseteq R$. Die reflexive und transitive Hülle von H ist gleich R.
- H ist stets minimal in dem folgenden Sinn: H enthält keine reflexiven Pfeile (x, x) und nur solche Pfeile $(x, y) \in R$, die sich nicht aus der transitiven Verkettung von Pfeilen $(x, z) \in H$ und $(z, y) \in H$ ergeben.
- Für das (abstrakte) Hasse-Diagramm H der geordneten Menge $[6]$ gilt damit

$$H = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}\,.$$

H

(Zeichnung)



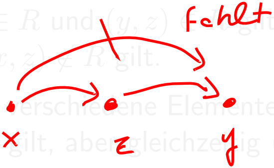
R ergibt sich dann aus H als reflexive und transitive Hülle.

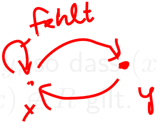
2. Wir entfernen das Paar $(3,4)$ aus der Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$. Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!

Antwort: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv.

Begründung: Die Eigenschaft der Transitivität für eine Relation R ist genau dann verletzt, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

1. Fall: Es gibt paarweise verschiedene Elemente x, y und z, so dass $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ gilt, nicht aber (x,z) aus R, d. h. dass $(x,z) \notin R$ gilt.





2. Fall: Es gibt verschiedene Elemente x, y, so dass $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ gilt, aber gleichzeitig $(x,x) \notin R$ gilt.

2. Wir entfernen das Paar $(3,4)$ aus der Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$. Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!

   Antwort: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv.

   Begründung: Die Eigenschaft der Transitivität für eine Relation R ist genau dann verletzt, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

   1. Fall: Es gibt paarweise verschiedene Elemente x, y und z, so dass $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ gilt, nicht aber (x,z) aus R, d. h. dass $(x,z) \notin R$ gilt.

   2. Fall: Es gibt verschiedene Elemente x, y, so dass $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ gilt, aber gleichzeitig $(x,x) \notin R$ gilt.

Entfernt man nun das Paar $(3,4)$ aus $\leq$, dann muss man prüfen, ob nun der Fall 1 eintreten kann.

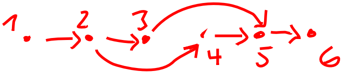
Nun gilt: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv, weil es kein anderes Element z „echt zwischen“ 3 und 4 gibt, d. h. mit $3 \leq z$ und $z \leq 4$ und $z \neq 3, z \neq 4$.
Gäbe es ein solches z, dann könnte $(3,4)$ nicht entfernt werden, ohne die Transitivitätseigenschaft nach Fall 1 zu verletzen.

Entfernt man nun das Paar $(3, 4)$ aus $\leq$, dann muss man prüfen, ob nun der Fall 1 eintreten kann.

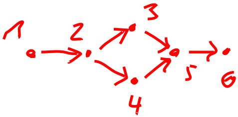
Nun gilt: Die resultierende Relation ist immer noch transitiv, weil es kein anderes Element z „echt zwischen" 3 und 4 gibt, d. h. mit $3 \leq z$ und $z \leq 4$ und $z \neq 3, z \neq 4$.
Gäbe es ein solches z, dann könnte $(3, 4)$ nicht entfernt werden, ohne die Transitivitätseigenschaft nach Fall 1 zu verletzen.

$R \setminus \{(3,4)\}$:

(Zeichnung) Hasse Diagr



oder



3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Antwort: Nur für $|M| \leq 1$ ist $\mathcal{P}(M)$ total geordnet.

Falls $a, b \in M$ mit $a \neq b$,
dann gilt weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{a\} \arrow[dr, dash] & & \{b\} \arrow[dl, dash] \\
 & \emptyset &
\end{tikzcd}$$

2. VA 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!

Antwort:

Sei $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

Begründung:

Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

$$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2).$$

O.B.d.A. können wir $m_1 \leq m_2$ annehmen.

$f \ni (x, f(x))$

$y = f(x)$

$f : X \to Y, \quad f \subseteq X \times Y$

2. VA 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!

   Antwort:
   Sei $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

   Begründung:
   Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

   $$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2)\,.$$

   O.B.d.A. können wir $m_1 \leq m_2$ annehmen.

Es folgt

$$3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} \cdot 3^{n_2} \,.$$

Wäre $m_2 - m_1 > 0$,
dann müßte 2 ein Teiler von 3 sein, weil 2 prim ist.
Aber 3 ist unzerlegbar.
Also folgt $m_1 = m_2$.

Analog erhält man $n_1 = n_2$, mithin $x_1 = x_2$.

Ergebnis: Wir haben also gezeigt: es kann nicht sein, dass zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 durch f auf ein und dasselbe y abgebildet werden. Genau das besagt die Injektivität von f.

2. Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$? Begründung!

Antwort:
Sei

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & : \quad n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & : \quad n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

f ist surjektiv.

Begründung: Es gibt zu jeder ganzen Zahl y eine natürliche Zahl n, so dass $f(n) = y$. Denn:
Falls $y > 0$, gilt dies für $n = 2y$.
Falls $y \leq 0$, gilt dies für $n = -2y + 1$.

Bemerkung: f ist sogar injektiv, also insgesamt bijektiv.

3. Gilt für $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Antwort: Nein!

Begründung: Seien $X = \{1, 2\}, Y = \mathbb{N}$ und $f(1) = 3, f(2) = 3$. Wir betrachten $A = \{1\}$.

Dann gilt $f(A) = \{3\}$ und $f^{-1}(\{3\}) = \{1, 2\}$.
Offenbar gilt $2 \notin A$, aber $2 \in f^{-1}(f(A))$,
d. h. $f^{-1}(f(A)) \not\subseteq A$.

3. VA 3

1. Eine Aussage ist bekanntlich ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Wir wollen als Lügner jeden Menschen bezeichnen, dessen Aussagen stets falsch sind. Nun trifft der Schiffbrüchige Moritz am Strand von Kreta einen Wanderer. Der Wanderer sagt zu Moritz: „Ich bin ein Kreter und alle Kreter sind Lügner".

   Was muss für den Wanderer gelten, wenn seine Aussage sinnvoll sein soll?

   Entscheiden Sie gegebenenfalls, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Antwort: Wenn der Wanderer kein Kreter ist, dann ist der Satz, den er sagt, eine sinnvolle Aussage, denn der Satz besitzt einen Wahrheitswert. Die Aussage ist natürlich zwingend falsch, denn der Wanderer behauptet ja, dass er ein Kreter ist, obwohl er in diesem Fall kein Kreter ist.

Wenn der Wanderer tatsächlich ein Kreter ist, dann kann jedenfalls sein Satz nicht wahr sein, denn als Kreter wäre er ein Lügner, der immer lügt. Falsch sein kann sein Satz aber nur dann, wenn es falsch ist, dass alle Kreter lügen. Mindestens ein Kreter muss dann also existieren, der irgendwann die Wahrheit sagt.

Sollte es also so sein, dass tatsächlich alle Kreter immer lügen, dann ist der Satz des Wanderers keine Aussage, denn er ist weder wahr noch falsch.

2. Tante Agatha ist ermordet worden, und zwar von einem Bewohner von Dreadbury Mansion. In Dreadbury Mansion wohnen Agatha, der Butler und Charles, und niemand sonst. Ein Mörder hasst immer das Opfer und ist niemals reicher als das Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha hasst. Agatha hasst jeden, außer den Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher als Tante Agatha ist. Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha hasst. Niemand hasst alle. Agatha ist nicht der Butler.

   Wer ermordete Tante Agatha? Begründen Sie Ihre Lösung.