

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
.....	<input type="checkbox"/> Diplom <input type="checkbox"/> Inform. <input type="checkbox"/> Bachelor <input type="checkbox"/> BioInf. <input type="checkbox"/> Lehramt <input type="checkbox"/> WirtInf.
Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
.....

Code:

--	--	--	--	--	--	--	--

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von bis / von bis

Vorzeitig abgegeben um

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Jede reflexive Relation $R \subseteq \{a, b\} \times \{a, b\}$ ist transitiv.
 2. Für jede binäre Relation S über einer endlichen Menge gilt $|S \circ S| = |S|^2$.
(\circ bezeichnet das Kompositionsprodukt von Relationen.)
 3. Die Formel $(\forall x \exists y P(x, y)) \wedge (\exists u \forall v \neg P(u, v))$ ist erfüllbar.
 4. $f(n) = 2 \cdot 3^n \in O(3 \cdot 2^n)$.
 5. Seien A und B prädikatenlogische Formeln. Falls $A \vdash B$ und $B \models A$ gelten, dann ist $A \Leftrightarrow B$ allgemeingültig.
 6. Der Binomialkoeffizient von xy^2z in dem ausmultiplizierten Produkt $(x + y + z)^4$ ist durch 24 teilbar.
-

Aufgabe 2 (6 Punkte)

1. Wie viele binäre boolesche Operationen \odot gibt es, so dass

$$x \odot \mathbf{false}$$

ein Widerspruch ist?

2. Sei \odot eine beliebige binäre boolesche Operation, so dass $x \odot \mathbf{false}$ ein Widerspruch ist. Zeigen Sie, dass dann die Formel

$$(x \odot (y \Leftrightarrow z)) \Rightarrow ((x \odot y) \Leftrightarrow (x \odot z))$$

eine Tautologie ist.

Hinweis: Untersuchen Sie getrennt die passenden minimalen Belegungen β , für die $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 1$ bzw. für die $[y \Leftrightarrow z](\beta) = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln F und G , die Gleichheitszeichen enthalten dürfen.

1. Wir modellieren 3-elementige Mengen. Geben Sie eine Formel F an, so dass für jede zu F passende Struktur $S = (U_S, I_S)$ mit $[F](S) = 1$ gilt:

$$|U_S| = 3.$$

2. Sei $Kgl(x, y)$ ein zweistelliges Prädikatensymbol, und sei \mathcal{S} die Menge aller Strukturen $S = (U_S, I_S)$ mit

- $U_S = \mathbb{N}_0$ und
- $I_S(Kgl) = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n_1 \leq n_2\}$.

Sei $Maximum(x, y, z)$ ein dreistelliges Prädikatensymbol. Geben Sie eine Formel G an, so dass jede Struktur $S \in \mathcal{S}$, für die $I_S(Maximum)$ definiert ist, folgendes erfüllt: $[G](S) = 1$ genau dann, wenn

$$I_S(Maximum) = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}_0^3 \mid n_3 \text{ ist das Maximum von } n_1 \text{ und } n_2\}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksspiel „4 aus 25“, bei dem 4 Zahlen aus [25] gezogen werden.

1. Wir lassen zu, dass Zahlen mehrfach gezogen werden, insgesamt aber nur 4 Mal eine Zahl gezogen wird.

Wie viele zulässige Ziehungen gibt es?

Hörsaalansage: Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Zahlen an.

2. Nun ändern wir die Bedingungen für Ziehungen so, dass nur verschiedene Zahlen und nie zwei benachbarte Zahlen n und $n+1$ gezogen werden. (D. h., dass Ziehungen mit benachbarten Zahlen, z. B. 2, 5, 6, 17, nicht zulässig sind.)

Wie viele zulässige Ziehungen gibt es in diesem Fall?

Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für das Ergebnis an.

Hinweis: Sie können die Aufgabe zurückführen auf das Modell der Verteilung von gleichen Bällen auf unterscheidbare Urnen.

Allgemeiner Hinweis: Binomialkoeffizienten brauchen nicht als Dezimalzahl ausgewertet zu werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Waggons (Eisenbahnwagen) werden zu Zügen (Sequenzen von Waggons) unterschiedlicher Länge $n \in \mathbb{N}_0$ zusammengestellt, wobei es auf die Reihenfolge der Waggons hinter der Lokomotive ankommen soll. Jeder einzelne Waggon unterscheidet sich von allen anderen. Es kommt auch vor, dass Lokomotiven ohne Waggons fahren.

1. Wie viele Züge gibt es, wenn 6 Waggons zur Verfügung stehen? Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an und begründen Sie dieses.
2. Je nach Art des Zuges sieht ein Betriebsplan die Zuordnung von einem, zweien oder dreien der Zugführer A , B und C zu jedem Zug vor.

Jeder der 3 Zugführer kommt auf 55 Prozent der Züge zum Einsatz.

In 30 Prozent der Züge treffen sich A und B ,

in 30 Prozent der Züge treffen sich A und C

und in 20 Prozent der Züge treffen sich B und C .

Wie groß ist der Prozentsatz der Züge, in denen alle Zugführer gemeinsam eingesetzt werden, gemessen an der Gesamtzahl der eingesetzten Züge?
