Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 7
Softwarezuverlässigkeit u. Theoretische Informatik
Prof. Dr. Javier Esparza
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2009/10
Übungsblatt 1
19. Oktober 2009

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 26. Oktober 2009, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf mathematischen Schulstoff. Insbesondere wird die Durcharbeitung des Arbeitsblattes 1 vorausgesetzt.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Ist -1 ein Teiler von 5? Geben Sie den größten gemeinsamen Teiler von 981 und 987 an und begründen Sie Ihr Ergebnis!

2. Beschreiben Sie informell ein einfaches Verfahren, mit dem man für beliebige natürliche Zahlen a und b feststellen kann, ob a ein Teiler von b ist! Gibt es für je zwei natürliche Zahlen a, b stets einen größten gemeinsamen Teiler ($ggT(a, b)$)? Begründung!

3. Beschreiben Sie informell ein Verfahren, mit dem man zu jeder natürlichen Zahl a mit $1 < a$ eine Primzahl p finden kann, die Teiler von a ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Für Zahlen s und t heißt $m = (s + t)/2$ das *arithmetische Mittel* von s und t. Man zeige für rationale Zahlen $s < t$, dass dann $s < m < t$ gilt!

2. Zwischen je zwei rationalen Zahlen s und t liegen unendlich viele rationalen Zahlen. Man sagt deshalb, dass die rationalen Zahlen *dicht* liegen. Zeigen Sie: wenn s und t rationale Zahlen sind mit $s < t$, dann gibt es unendlich viele rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ mit $s < r_1 < r_2 < \ldots < t$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl. Dann bezeichnet y^n das Produkt mit n Faktoren y.
Eine Zahl y heißt eine n-te Wurzel aus x, i. Z. $y = x^{\frac{1}{n}}$, wenn $y^n = x$ gilt. Zeigen Sie:
Wenn $5^{\frac{1}{3}} = \frac{m}{n}$ gilt, dann gibt es m' und n' mit $m' < m$ und $n' < n$, so dass $5^{\frac{1}{3}} = \frac{m'}{n'}$.
Was bedeutet dies für die Frage, ob $5^{\frac{1}{3}}$ eine rationale Zahl ist?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Addition zweier reeller Zahlen $a = 0{,}a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ und $b = 0{,}b_1 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$ kann dann durch stellenweise Addition $c_i = a_i + b_i$ für $c = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots c_n c_{n+1} \ldots$ erfolgen, wenn $c_i \leq 9$ für alle i gilt. Falls für ein gewisses j aber $c_j > 9$ gilt, muss man einen Stellenübertrag $\ddot{u} = 1$ auf c_{j-1} berücksichtigen, was dazu führen kann, dass weitere Übertrage an den Stellen n mit $n < j - 1$ zu berücksichtigen sind.

Entwickeln Sie eine Vorschrift für die Bestimmung der n-ten Stelle einer korrekten Darstellung der Summe zweier reeller Zahlen $a = 0, a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ und $b = 0, b_1 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$.

Hinweis: Mathematiker benutzen Fallunterscheidungen unabhängig davon, ob man effektiv bestimmen kann, welcher Fall vorliegt.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Wir wissen, wie man aus einer natürlichen Zahl n die nächste natürliche Zahl $n+1$ gewinnt. Damit besitzen wir das Bildungsgesetz der generativen Aufschreibung $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ unserer ersten unendlichen Menge. Sie wird als ungeordnete Zusammenfassung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen zu einer Menge $\mathbb{N}$ konstruiert. Davon ausgehend konstruiert man dann die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Diese Mengen können wir nun als Universum oder Grundmenge benützen.

1. Vergleichen Sie die durch die Aufschreibungen $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 7, 5, 3\}$, $\{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $\{1+2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{1+|2n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ definierten Mengen. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

2. Wir betrachten die Mengen $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{|-1|^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$, $\{-1, 1\}$. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!

3. Wir betrachten hierarchische Mengen- und Tupelstrukturen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente bzw. Komponenten besitzen jeweils die Objekte $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$, $(1, 1, 1, \ldots, 1^n)$, $\{1, 1, 1, \ldots, 1^n\}$, $\{(1, 1), (1, 1)\}$, $(\{1, 1\}, \{1, 1\})$?

4. Eine intensionale Beschreibung $M = \{x \in U \mid P(x)\}$ gibt an, welche Eigenschaft P ein Element x eines Universums U haben muss, um in M enthalten zu sein. Geben Sie eine intensionale Beschreibung an für die Mengen $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{1+2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$!

Vorbereitung 2

Ausgehend von bereits gebildeten Mengen kann man weitere Mengen gewinnen z. B. durch die Operationen Vereinigung $\,.\cup .\,$, Durchschnitt $\,.\cap .\,$, Differenz $\,.\setminus .\,$, symmetrische Differenz $\Delta(\,.\,,\,.\,)$, Komplement $\overline{(\,.\,)}$.

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Beschreiben Sie A als Durchschnitt 5-elementiger Mengen, als Vereinigung 3-elementiger Mengen, als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen, als Komplement einer Menge, als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen!

   Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste!

Für beliebige Mengen A und B kann man obige Operationen in beliebiger Auswahl und beliebig oft auf die jeweiligen Ergebnisse anwenden. Dann aber stellt sich die Frage, wie viele Mengen man auf diese Weise höchstens erhalten kann. Tatsächlich kann diese Frage durch ein Venn-Diagramm entschieden werden.

2. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und dem umfassenden Universum $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele verschiedene Mengen können innerhalb dieses Diagramms definiert werden? Geben Sie jeweils an, durch welche Operationsanwendungen diese Mengen aus A und B gewonnen werden können.

Vorbereitung 3

Wir fassen die Buchstaben a, b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.

2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b, und b kommt vor c, und insgesamt kommt a auch vor c).

   Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!

3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!

4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Tutoraufgabe 1

1. Wir definieren intensional $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ und } 3 \text{ sind nicht Teiler von } x\}$.

   (a) Die aufzählende (extensionale) Beschreibung $B = \{1, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ einer Menge B legt ein vernünftiges aufzählendes Bildungsgesetz nahe. Welches?

   (b) Wir betrachten $C = \{1 + \sum_{i=1}^{n} (3 - (-1)^i) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
   Zeigen Sie die Mengengleichheit $A = C$!

2. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{(\sqrt{-1})^n \mid n \in \mathbb{N}\})$?

Tutoraufgabe 2

Sei U eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge X von U sei $\overline{X} = U \setminus X$ das sogenannte Komplement von X bezüglich U.

1. Geben Sie ein Beispiel für $A, B \subseteq U$ an, so dass die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nicht gilt. Für welche Mengen A, B gilt die Gleichung?

   Um die DeMorgansche Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für beliebige Mengen A und B nachzuweisen, reicht es, die Gleichung im Venn-Diagramm der Vorbereitungsaufgabe 2.2 zu verifizieren. Begründung!

2. Um die allgemeine Gültigkeit von Mengengleichungen in 3 Variablen A, B C zu beweisen oder zu widerlegen, reicht es, dies in einem Venn-Diagramm für die Mengen $A = \{a, ab, ac, abc\}$, $B = \{b, ab, bc, abc\}$, $C = \{c, bc, ac, abc\}$ über dem Universum $U = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc, d\}$ zu tun.

   Widerlegen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$!
   Beweisen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$!

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A_i \subseteq U$ für alle $i \in [n]$. Zeigen Sie für $n = 3$ die Gleichung

   $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\,.$$

   Wie kann man den Beweis dieser Gleichung für $n = 4$ zurückführen auf den Beweis der Gleichung für $n = 3$? Wie kann man diesen Schritt verallgemeinern?

Tutoraufgabe 3

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,

2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv,

3. die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch,

4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1.

Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung!
In welcher Weise wird das Urbild von R_3 partitioniert?