
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 14. Dezember 2009, 14 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$ oder $f(n) \in O(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung. Benutzen Sie gfs. die Monotonieeigenschaften der Funktionen ohne Beweis.

$$\begin{array}{ll} f_1(n) = 2^{\ln n}, & f_2(n) = \sqrt{n^2}, \\ f_3(n) = (\ln n)^{\ln n}, & f_4(n) = (\log n^2)^2. \end{array}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1000015 gibt es, so dass die Summe der einzelnen Ziffern $\in \{0, \dots, 9\}$ ihrer Dezimaldarstellung genau 15 beträgt?
2. Wie viele Binärwörter der Länge n (nur Buchstaben 0 und 1) gibt es, die die Ziffernfolge "00" genau zweimal enthalten?

Präzisierung: In "000" ist die Ziffernfolge "00" an zwei Positionen, d.h. zweimal enthalten.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Teilmengen B von $[n]$, die mindestens ein konsekutives Paar $k, k+1$ von natürlichen Zahlen enthalten und definieren

$$A_n = \{B \subseteq [n] \mid |B| = 3 \wedge \exists x, y \in B : x + 1 = y\}.$$

Bestimmen Sie $|A_n|$ als arithmetische Formel, die von n abhängig ist, und begründen Sie Ihr Resultat.

Hinweis: Partitionieren Sie A_n in geeignete 3 disjunkte Klassen und bestimmen Sie zunächst die Anzahl der Elemente in jeder dieser Klassen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : [m] \rightarrow [n]$ wird monoton genannt, wenn für alle $i, j \in [m]$ die Implikation $i \leq j \implies f(i) \leq f(j)$ gilt.

Wie viele derartige Funktionen f gibt es in Abhängigkeit von m und n .

Geben Sie eine Formel an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Ab Blatt 2 werden zusätzlich Hausaufgaben gestellt, die selbständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung spätestens zum genannten Termin abgegeben werden sollen.

Vorbereitung 1

Sei $A \subseteq \{1, 2, \dots, 6n - 5\}$ mit $|A| = 2n$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in A$ gibt, die durch 2 oder durch 3 teilbar ist.

Vorbereitung 2

Seien A und B beliebige Mengen und $\mathcal{P}(A)$ bzw. $\mathcal{P}(B)$ die entsprechenden Potenzmengen.

1. Man zeige $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Geben Sie ein Beispiel für A und B an, so dass $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Vorbereitung 3

Die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ sind definiert als die Anzahl der verschiedenen Partitionen einer n -elementigen Menge in k nicht leere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Begründen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.
(a) $S_{0,0} = 1$, (b) $S_{n,n} = 1$, (c) $S_{n,k} = 0$, falls $k > n$, (d) $S_{n,0} = 0$, falls $n > 0$.
2. Bekanntlich gilt die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die Rekursion bis $n + k = 8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks dar.

Vorbereitung 4

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechner rayhalle1, rayhalle2 bis rayhallem ein, um die DS Übungsaufgaben zu kopieren.

Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird, welcher Student auf welchem Rechner eingeloggt ist, und auf jedem Rechner mindestens ein Student eingeloggt ist.

Tutoraufgabe 1

1. Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 3 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

2. Begründen Sie: Es gibt mindestens 5^{n-1} Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus dem Alphabet $\{a, b, c, d, |\}$, die eine ungerade Anzahl von Zeichen '|' enthalten.

Prüfen Sie zunächst den Fall $n = 1$.

Tutoraufgabe 2

1. Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ und $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Berechnen Sie $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)|$!

Hinweis: Beachten Sie, dass die angegebenen Mengen nicht disjunkt sind.

2. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen n mit $n \leq 1000$, die durch 5, 7 oder 13 teilbar sind.

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, d. h. die Anzahl verschiedener Partitionen einer n -elementigen Menge in k nicht leere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \geq 1$: $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.
2. Zeigen Sie durch direkte kombinatorische Überlegungen (d. h. ohne vollständige Induktion) für alle $n \geq 1$: $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.
3. Seien P bzw. Q eine 5-elementige bzw. eine 3-elementige Menge. Wie viele surjektive Abbildungen von P auf Q gibt es?

Tutoraufgabe 4

Es kommen n Kunden in einen Buchladen. In dem Buchladen gibt es m verschiedene Bücherstapel. Jeder Bücherstapel besteht aus mindestens n Büchern eines bestimmten Werkes. Jeder Kunde kauft genau ein Buch. Am Ende des Tages stellt der Buchhändler fest, dass von k verschiedenen Bücherstapeln Bücher gekauft worden sind.

Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Verteilung der Bücher auf die Kunden, wenn man nicht weiß, von welchen Stapeln die Bücher genommen wurden?

(Die Kunden seien unterscheidbar und die Werke aus verschiedenen Stapeln seien unterscheidbar; zwei Ausgaben des gleichen Werkes seien nicht unterscheidbar.)