Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2006
Übungsblatt 1
28. April 2006

Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 5. Mai 2006 vor der **Zentralübung**

Aufgabe 1

Die Durchführung jedes Experiments (d. h. eines implementierten Algorithmus) endet in einer Ergebnisbewertung (Beobachtung), d. h. in einer Feststellung, dass gewisse Aussagen erfüllt oder nicht erfüllt wurden. Die Menge der möglichen Aussagen, die über den Ausgang eines Experiments gemacht werden können, ist Teil der präzisen Definition des Experiments. Grundsätzlich sind alle Aussagen logisch kombinierbar und bilden eine Boolsche Algebra von möglichen Aussagen, die alle bei Ausgang des Experiments grundsätzlich entweder wahr oder falsch sind. Die Aussagen werden abstrakt gedacht als Objekte, die man Ereignisse nennt, innerhalb einer entsprechenden Boolschen Algebra von Ereignissen ("Ereignisalgebra"). Die Menge der Ereignisse heißt dabei gelegentlich "Ereignisraum" als Trägermenge der Ereignisalgebra.
Wir nehmen an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten einer Aussage (das Eintreten eines Ereignisses) A feststellbar sei.

1. Welche Aussagen (Ereignisse) sind in jeder Ereignisalgebra enthalten, die A enthält?
2. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V nie das Ereignis A. Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Aufgabe 2

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Aufgabe 3

Am 9. September 1990 wurde folgendes Problem in der "Ask Marylin" Kolumne des Parade Magazine gestellt:

> *"Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door number 2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors?"*

Dieses Problem ist auch bekannt als das "Ziegenproblem" bzw. "Monty-Hall Dilemma".

1. Welches ist die bessere Strategie - wechseln (W) oder nicht (NW)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie das Auto, wenn Sie die bessere Strategie verwenden?
2. Ändert sich der Sachverhalt, wenn der Moderator *unabhängig von der Kandidatenwahl* eine der beiden Türen mit einer Ziege öffnet (also evtl. auch die vom Kandidaten gewählte Tür)?
3. Ein populärer Einwand gegen die korrekte Lösung von 1. ist folgender:

   > Ein UFO landet im Zuschauerraum und ein Außerirdischer springt auf die Bühne. Er sieht eine offene Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Seine Chancen stehen also 1:1, dass er die richtige Tür wählt.

   Warum überträgt sich dies nicht auf den Kandidaten?

Aufgabe 4

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 "Kopf" zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 "Zahl". Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal "Kopf" und $n - k$ mal "Zahl".

1. Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ergebnisraum Ω_n.
2. Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel.*)
3. Wie groß ist $Pr[k \text{ gerade}]$ in Abhängigkeit von n?
4. Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } n - i + 1\text{-ter Wurf}]$?
5. Betrachten Sie folgende Variante von Teilaufgabe 4: Eine *un*faire Münze wird $2n$ mal geworfen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, "Kopf" zu werfen, p, mit $0 < p < 1$.

   Wie groß ist nun $Pr[\forall i \leq n : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } 2n - i\text{-ter Wurf}]$?