
Diskrete Strukturen II

Abgabetermin: 19. Mai 2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 1

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes **CHOOSE** aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen), bis **C** gezogen wurde.
2. $Y :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis **C** gezogen wurde.
3. $Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis beide **O** gezogen wurden.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Alphabet $A = \{a, b, c\}$. Es sei X ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Ergebnismenge $\Omega = A$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\Pr[a] = \frac{1}{2}$, $\Pr[b] = \frac{1}{3}$ und $\Pr[c] = \frac{1}{6}$. X sei durch eine Funktionsprozedur X' implementiert, die bei Aufruf die Buchstaben aus Ω mit einer den angegebenen Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Häufigkeit ausgibt.

Wir betrachten nun den folgenden Algorithmus X'_n zur Ausgabe eines Wortes $w \in A^*$ der vorgegebenen Länge $n \in \mathbb{N}_0$. Dabei soll die Funktion $append(w, x)$ einen Buchstaben x an das Wort w (rechts) anhängen.

```
 $i := 0$  ;  $w := \epsilon$  ;  
while  $i \neq n$  do  
 $x := X'$  ;  $w := append(w, x)$  ;  $i := i+1$  end
```

1. Deuten Sie die Ausgabe des Algorithmus X'_n adäquat als Ereignis in einem Wahrscheinlichkeitsraum $W_n = \langle \Omega_n, \Pr_n \rangle$. Beachten Sie, dass verschiedene Ausgaben disjunkten Ereignissen entsprechen müssen.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass für eine Ausgabe w die Anzahl der enthaltenen a gleich 2, die Anzahl der enthaltenen b gleich 1 und die Anzahl der enthaltenen c gleich 2 ist.
3. Die Funktionen $X_a, X_b, X_c : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Wort w entsprechend die Anzahl der enthaltenen a bzw. b bzw. c zuordnen, können als Zufallsvariable aufgefasst werden.

Geben Sie die gemeinsame Dichte der Variablen X_a und X_b an!
Geben Sie die entsprechenden Randdichten von X_a und X_b an!

4. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_c .

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y . Zeigen Sie:

1. Es gilt

$$\text{Var}[X + Y] + \text{Var}[X - Y] = 2 \cdot \text{Var}[X] + 2 \cdot \text{Var}[Y].$$

2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt

$$\mathbb{E}[(X + Y) \cdot (X - Y)] = \mathbb{E}[X + Y] \cdot \mathbb{E}[X - Y].$$

Aufgabe 4

1. Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \dots, 6$ einmal vorgekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Wie groß sind $\mathbb{E}[X]$ und $\text{Var}[X]$?
2. Für gegebenes n ziehen wir Zahlen aus $\{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ mit Zurücklegen so lange, bis die Summe s der gezogenen Zahlen ≥ 1 ist. Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Zahlen, die wir ziehen müssen, wenn $n = 2$?
(Bemerkung: Wir werden im Verlauf der Vorlesung sehen, dass $\mathbb{E}[\text{Anz. Züge}] \rightarrow e$ für $n \rightarrow \infty$.)