
Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 7. Mai 2007 vor der Vorlesung

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten eine kontextfreie Chomsky-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$. Beweisen Sie mit Induktion über die Länge von Ableitungen die folgende Aussage für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^+$ und $w \in (V \cup \Sigma)^*$:

Falls $uv \rightarrow_G^* w$, dann gibt es $u', v' \in (V \cup \Sigma)^*$, so dass $w = u'v'$ mit $u \rightarrow_G^* u'$ und $v \rightarrow_G^* v'$ gilt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Geben Sie eine längenmonotone Grammatik G an, die die Sprache $L = \{a^i b^{2i} c^{3i}; i \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt.

Ist Ihre Grammatik G vom Typ 1? Ist L kontextsensitiv?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie für die in der vorausgegangenen Aufgabe anzugebende Grammatik G für die Sprache L nun explizit, dass

1. mit Ihrer Grammatik alle $w \in L$ ableitbar sind,
2. mit Ihrer Grammatik $w = ac^2b^2c$ nicht ableitbar ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik

$$G := (\{S, T, A, B\}, \\ \{a, b\}, \\ \{S \rightarrow AS, S \rightarrow T, A \rightarrow aB, aBT \rightarrow Tab, aBT \rightarrow ab\}, \\ S)$$

1. Geben Sie eine Grammatik vom Typ 3 an, die $L(G)$ erzeugt.
2. Geben Sie einen DFA an, der $L(G)$ erkennt.

Hinweis: Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.

Vorbereitung 1

Für Zwecke dieser Aufgabe bezeichnen wir Produktionen der Form $A \rightarrow B$ mit Variablen A, B als Kettenproduktion. Eine Menge $\{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n, A_n \rightarrow A_1\}$ bezeichnen wir als Zyklus von Kettenproduktionen.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Herleitung einer kontextfreien Grammatik G' aus einer gegebenen kontextfreien Grammatik G , so dass $L(G') = L(G)$ gilt und die Produktionsmenge P' von G' keine Zyklen von Kettenproduktionen enthält.

Vorbereitung 2

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer Anzahl n von Zuständen. Zeigen Sie:

1. Sei $w = w_1 w_2 \dots w_{2n} \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge $2n$ und sei q_0, q_1, \dots, q_{2n} die Folge der Zustände, die M ausgehend von q_0 bei Eingabe von w annimmt. Dann gibt es k, l mit $k < l$, so dass $q_k = q_l$.
2. Falls es ein Wort w der Länge $2n$ gibt mit $w \in L(M)$, dann gibt es unendlich viele Wörter, die der Automat M erkennt.

Tutoraufgabe 1

Seien r, s Variablen für formale Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Gleichungen für reguläre Ausdrücke

$$((rs) | r)^* r = r ((sr) | r)^*, \quad (1)$$

$$r ((rs) | s)^* r = r r^* s (r r^* s)^* r^*, \quad (2)$$

$$(r^* s^*)^* = (r | s)^*. \quad (3)$$

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b c^i; i \in \mathbb{N}_0\}$ nicht regulär ist.